RAD

JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE

ZNANOSTI I UMJETNOSTI.

KNJIGA CXXXV.

MATEMATIČKO-PRIRODOSLOVNI RAZRED.

XXV.

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA U ZAGREBU

U ZAGREBU 1898.

KNJIŽARA JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE (DIONIČKE TISKARE).

Dionička tiskara u Zagrebu.

Sadržaj.

	Strana
Građa za poznavanje hrvatske faune hidroidpolipâ. Od K. Babića	1— 47
Dokaz jednog Weierstrassova stavka. Od dra. V. Varićaka	48— 50
Vijor kod Čazme. Od dra. A. Mohorovičića	51— 56
Jedan pogled na prirodu transcendenata definisanih diferencijalnim jednačinama prvoga reda sa promjenljivim parametrima. Od M. Petrovića	57—108
Relacije kod pravilnih poligona, krugu upisanih i opisanih. II. dio. Od E. Doležala	109—166
Četrnajsto potresno izvješće: za god. 1896. Od dra. M. Kišpatića	167—174
Petnajsto potresno izvješće: za god. 1897. Od dra. M. Kišpatića	175—198
Bodorka. Od M. Medića	199—208

Građa za poznavanje hrvatske faune hidroidpolipâ.

Predano u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 27. studenoga 1897.

napisao Krunoslav Babić.

Literatura.

Allman G., A Monograph of the Gymnoblastic or Tubularian Hydroids, London, 1871—72, 2 vol.

Idem, Plumularidae et Tubulariae etc.; Report on the Scientific results of the Voyage of H. M. S. Challenger, Hydroida vol. VII. i XXIII.

Carus V., Prodromus faunae mediterraneae, Vol. I., 1885.

Cavolini F., Memorie per servire alla storia dei polypi marini, Napoli 1785.

Chun C., Coelenterata, Bronn's Klassen und Ordnungen des Thierreichs, Bd. II, 2. Abtheilung, 1—14 Liefer.

Ciamician J., Ueber Lafoëa parasitica, nov. spec. Zeitschr. für wiss. Zool., Bd. 33.

Claus C., Studien über Polypen und Quallen der Adria. Denkschr. Akad. d. Wiss., Wien, Bd. XXXVIII.

Frauenfeld G., Die Algen der dalmatinischen Küste, Wien 1855.

Graeffe E., Uebersicht der Seethierfauna des Golfes von Triest. Arbeiten aus dem zool. Instit. der Univer., Wien, Tom. V. 1884.

Idem, Biologische Notizen über Seethiere der Adria. Bolettino della Soc. adr. di scienze naturali, Trieste 1883, vol. VIII.

Idem, Ueber Polycoryne Helleri. Bol. d. Soc. adr. v. VIII.

Idem, Nachtrag zu dem Aufsatz über Polycoryne Helleri. Bol. d. Soc. adr. v. VIII.

Grube E., Ein Ausflug nach Triest und dem Quarnero, Berlin 1861.

Haeckel E., Systematische Phylogenie der wirbellosen Thiere, II. Theil, Berlin 1896.

Hincks Th., British Hydroid Zoophytes, I. II. vol. London 1868.

Heller C., Die Zoophyten und Echinodermen des adriatischen Meeres. Zool.-bot. Gesellschaft, Wien 1868.

Jickeli F., Der Bau der Hydroidpolypen. Morphol. Jahrbuch, Bd. VIII, 1882.

Lendenfeld v. R., Ueber Coelenteraten der Südsee. Zeitschr. für wiss. Zool., Bd. 37, 38.

Meneghini G., Osservazioni sull' ordine delle Sertulariee della classe dei Polipi. (Memorie dell' Imp. Regio Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Vol. II.) Venezia 1845.

Pieper W. Fr., Ergänzungen zu „Heller's Zooph. etc. des adr. Meeres". Zool. Anzeiger, VII. Jahrg., Leipzig 1884.

Plessis G., Catalogue provisoire des Hydroides Medusipares observés durant l' hiver 1879—80, à la Station zoologique de Neaples. Mittheil. aus der zool. Station zu Neapel, II. Bd. Leipzig 1881.

Idem, Faune des Hydraires littoraux gymnoblastes observés a Villefranche sur mer. Recuil Zoologique Suisse, IV. 1888.

Idem, Sur le Cladocoryne floccosa. Mittheil. der Station Neapel I. II., Leipzig 1881.

Vogt C., und Yung E., Lehrbuch der praktischen vergl. Anat., III. Lief., Braunschweig 1885.

Weismann A., Ueber eigenthümliche Organe bei Eudendrium racemosum. Mittheil. aus der zool. Station Neapel, III. Bd. Leipzig 1882.

Koliko li su već pojedinci, razne ekspedicije, pa i zadnja Challenger-ova, sabrale građe iz mora, te osvijetlile mnoge tamne strane u zoologiji! Ali je to sve još uvijek premalo prema onome, što se krije u morskim dubinama. Bezbroj ti se poteškoća namiće pri sakupljanju morskih životinja: valovi, nezgodne sprave itd. Pa kada bi ove sprave i bile možda zgodne, čovječje oko ne prodire u veće dubine, te se tako zoolog namjeri samo na životinje, koje mu slučajno dođu pod ruku. Zato bi bilo presmjelo nadati se, da će ljudi ikada doći na kraj istraživanju u moru. No uza sve to pojedinci ne sustaju, nego se laćaju posla, da istraže more barem u toliko, u koliko se dade.

I mi Hrvati imamo svoje more, koje se je do sada dosta slabo istraživalo. Dalmatinska je obala ipak više istražena od obala hrvatskog Primorja, te bi bilo nužno, da se u floristićkom i faunistićkom pogledu bolje istraži i ova sjevernija obala našega hrvatskoga mora.

U ovoj sam radnji pokušao, da obradim jedan samo mali odio celenterata: *Hidroidpolipe* hrvatskog Primorja (od Rijeke do Karlobaga) i Rovinja.

Životinje mi je poslao Fr. Dobiaš (Padewieth), trgovac prirodnina u Senju, a za Rovinj tamošnja zoološka postaja. Iz hrvatskog sam Primorja želio, da priberem što više podataka, pa sam se mjeseca svibnja o. g. sam tamo uputio i sabrao dosta građe. Prošao sam sve znatnije točke hrvatskog Primorja: Rijeku, Bakar, Kraljevicu, Crikvenicu, Novi, Senj, Sv. Juraj i Karlobag. Istraživanjem sam došao do povoljnih rezultata, te konstatovao do 51 vrstu (13 vrsta gimnoblastea i 38 vrsta kaliptoblastea). U svemu je danas poznato iz Jadranskog mora 96 vrsta hidroidpolipa. Heller konstatuje u Jadranskom moru 37 vrsta hidroidpolipa (4 vrste gimnoblastea i 33 vrste kaliptoblastea). Osim ovih našao je Pieper 37 vrsta (7 vrsta gimnoblastea i 30 vrsta kaliptoblastea). Uz ove spominje Graeffe 14 vrsta (9 vrsta gimnoblastea i 5 vrsta kaliptoblastea), a ja sam napokon mogao odrediti još 8 vrsta novih za Jadransko more (3 vrste gimnoblastea i 5 vrsta kaliptoblastea).

Svakoj sam vrsti dodao kratku diagnozu, spomenuo joj geografsko raširenje u opće po svijetu, a napose u Jadranskom moru, i sastavio za pojedine rodove sinoptičku tablicu.

Ne mogu a da se ovdje ipak ne sjetim gospode, kojima dugujem hvalu, što su mi olakšali znanstveni posao. U prvome redu lijepa hvala g. profesoru S. Brusini, ravnatelju narod. zool. muzeja, koji mi je osobito išao na ruku kod pribavljanja literature, pače mi je dao na raspolaganje i svoje vlastite knjige i dozvolio, da mogu raditi u zoološkom zavodu. Poznatom susretljivošću pomagao mi je svojim savjetom i inače pri određivanju vrsta g. dr. L. Car, čuvar zool. odjela narod. muzeja i suplenat za zoologiju na kr. sveučilištu, na čemu mu od mene najsrdačnija hvala, a zahvaljujem se g. prof. dr. A. Heinzu, što mi je dao na porabu literaturu i herbare za naše morske alge.

Hidroidpolipi su bogato zastupani u hrvatskom Primorju brojem vrsta, a osobito brojem individua. Naći ih je na kamenju, drvenim stupovima, algama, kućicama puževa, školjkama, koralima, briozoima, ascidijama i racima. Najviše pak dolaze na algama, a među ovima osobito na *Cystosira* i *Sargassum*.

Morska je flora hrvatskog Primorja jako raznovrsna, što je također jedan razlog, kako ćemo poslije vidjeti, da su hidroida onako brojno zastupana vrstama. U bakarskom je zaljevu morska flora jednolična, pa zato nalazimo ondje i malo vrsta hidroidpolipa. Sjevero-istočno, gdje leži sam grad Bakar, utječe u more velika množina slatke vode, pa tako voda postaje brakičnom. To je razlog, te na tom mjestu nije moguće naći hidroidpolipa. Slatka voda uz to donaša mulj, koji se tamo na daleko i u velike taloži, te prieči tim svaki rast kakvoj morskoj flori. Nešto južnije, prema Bakarcu, počinje kamenitije tlo, što se već vidi po samoj obali, pa tu s toga i ima nešto flore u moru. Kušao sam baš na raznim mjestima dizati alge, ali sam se žalibože namjerio svuda samo na jednog jedinog hidroidpolipa: *Campanularia angulata*. Pače i na mitilusima, koje tamo umjetno gaje, našao sam istu vrstu. U Kraljevici je tlo kamenitije i flora bolje zastupana. Kod Crikvenice ima dosta mulja kao i u Novom (ovdje nešto manje). U svim ovim mjestima, gdje je dno morsko kamenitije, rastu razne alge, a na ovima je pričvršćeno više vrsta hidroidpolipa. Kod Senja, osim u samoj luci, gdje je dosta mulja, morsko je dno kamenito, flora bujnija i različitija, te je s toga moći naći i više vrsta hidroidpolipa, među kojima se osobito ističu velikim brojem individua: *Aglaophenia*-vrste, *Sertularella* i *Halecium ophiodes*. U Sv. Jurju utječu u more potoci i ponornica rijeka Lika, a na više se mjesta vidi na morskoj površini, kako voda iz dna izvire. Na mjestima, gdje nema slatke vode, dno je posve zaraslo raznim algama, a među ovima dolazi uz *Cystosira* najviše *Sargassum*, koji je pun *Plumularia*, a osobito u velikom broju individua nalazimo vrstu: *Plumularia secundaria*. Uz ovu je vidjeti na pomenutim algama i kamenju: *Aglaophenia*-, *Sertularella*-, *Campanularia*-vrste, *Halecium ophiodes* i druge, ali u manje individua. Dalje prema Karlobagu vidimo slično: nedaleko od obale u moru nekoliko izvora, što se osobito lijepo vidi za tiha vremena. Od Jablanca do Karlobaga (Prizna, Cesarica, Karlobag i Lukovo Šugarje) dno je sasma kamenito, te na više mjesta vidimo nedaleko od obale, kojih 20 do 30 met., gdje iz mora strše pojedine hridi. Dakako, da je tu i

bujna morska flora, različita sa svojih vrsta, a hidroidpolipa ima jako mnogo. Među ovima dolazi u velikom broju: *Campanularia caliculata*, *Sertularella fusiformis* i *Aglaophenia*-vrste. Sve ovo, što sam isticao glede kakvoće morskog dna, nisam bez razloga učinio. Može se naime opaziti, da je posvuda uz kamenitije morsko dno vezana i bujnija i raznovrsnija flora, a uz ovu opet različitija fauna hidroidpolipa.

Od Rijeke do Novoga, gdje je na dnu dosta mulja, može se opaziti golema razlika u bogatstvu hidroida prema predjelu od Senja do Karlobaga, gdje je goli kamen. Ovdje je i morska voda mnogo čišća, što osobito prija ovim životinjama. Pojedine vrste: *Aglaophenia*, *Campanularia* i *Plumularia* osobito se ističu u ovim južnijim predjelima hrvatskog Primorja svojim uglednim i lijepim habitom.

Spomenusmo, da hidroidpolipi dolaze na kamenju; u većoj dubini morskoj na donjoj strani ovoga, koje pobacano leži jedno preko drugoga (hohlliegend) tako, da ostavlja između sebe šupljine. Zatim dolaze hidroidpolipi na mekušcima i racima. Takav način života imade tu svrhu, da štiti pričvršćene životinje protiv zamuljenja s jedne strane, a s druge strane, da na živim mekušcima i racima dođu u blizinu malenih morskih životinjica, primjerice kopepoda, koji im služe za hranu.

Na plićim mjestima, blizu obale, gdje se voda neprestano giblje, a tlo je kamenito, pa gdje tako ne dolazi do taloženja mulja, nalazimo hidroidpolipe pričvršćene na gornjoj strani kamenja.

Vrijedno je, da se ovdje spomene jedna vrsta: *Lafoëa parasitica*, koja je do sada bila nađena samo na *Aglaophenia*-vrsti, dok sam je ja našao i na jednoj *Plumularia*-vrsti. *Lafoëa parasitica* živi pričvršćena uz stabljiku ovih hidroidpolipa, nalazi kod njih zaštite, te je po tom neki nametnik. Ti su hidroidpolipi, na kojima *Lafoëa parasitica* nametnički žive, kod nas *Aglaophenia octodonta* i *Plumularia halecioides*.

Pretežna se većina hidroidea razvija u toplije godišnje doba, osobito pak oni, koji se nalaze na plićim mjestima. Nekoje vrste posve izginu u jeseni, a neke ipak mogu da podnesu i hladnije doba godine.

Godišnja temperatura u moru varira kod nas u Primorju od 8°—20° R. u dubini od 1'—120', a u dubini od 40 m. od 9°—14° R.

Kao što sve, što je živo na našem planetu, tako i ovaj odio celenterata ima među samim životinjstvom dosta neprijatelja. U

prvome redu su to račići *Caprella,* koji se zavuku među grane polipovog stabla, te izjedaju mlade spolne pupove. Može se posumnjati i za gamaride *(Probolium, Podocerus),* da traže kod polipa hrane, jer se utiskuju među grane, osobito kod *Eudendrium* i *Tubularia.* Od mekušaca bi bili neprijatelji *Nudibranchiata: Doto, Tergipes,* pa *Hermaea* na *Obelia*-vrstama, *Aeolidia* na *Eudendrium*-vrstama, *Polycera* na *Tubularia*-vrstama i neke male *Doridae.* Zatim odrasli i larvalni oblici piknogonida *(Nymphon)* živu od hidroidpolipa. Kao nametnici hidroidea spominju se larve piknogonidâ *(Phoxichilidium),* koje živu u gastrovaskularnom prostoru. Ovo su neprijatelji, za koje se znade, a koliko ih još ima, za koje ne znamo! S toga nije ni čudo, što su u borbi za opstanak sami hidroidpolipi udesili svoje tijelo, da ga uzmognu barem donekle zaštititi od mnogobrojnih neprijatelja.

To udešenje očituje se u tom, što su hidroidpolipi na vanjskoj strani svoga tijela izlučili tvrdi, hitinozni ovojak — *perisark.* Kod nekojih se je taj perisark produljio i na same hidrante, te ih poput čaške *(hydrotheca)* obuhvatio. Postanak čaške, njezin razvoj, te najsavršeniji njezin oblik kušao sam si protumačiti ovako. Uzmimo primjerice polipa, kojemu je hidrant gol, dakle nema hidroteke. Na hidrantu vidimo ticala, koja su proviđena žarećim kapsulama. Znamo, da im je fiziološka zadaća braniti nezaštićeni dio polipa, a onima oko usta još hvatati i ubijati plijen, koji će služiti životinji za hranu. Nu sve te uredbe nisu bile valjda dovoljne da očuvaju hidrant protiv njegovih neprijatelja. Tako se je hidrant znao za pogibelji smanjivati t. j. pomoću svojih vlastitih mišica u svojoj se glavnoj osi skraćivati, da tako neprijateljima i inim pogiblima izbjegne. Stapkine su mišice također vukle sa svoje strane hidrant i tako se je cijeli mekani dio tijela *(cenosark)* u svojoj glavnoj osi skraćivao. Pošto je vanjski ovojak *(perisark)* hitinozan, te tvrđi od nutrnjeg mekanog tijela *(cenosark),* to se je u početku, pri kušanju skraćivanja glavne osi cenosarka moralo dogoditi slijedeće. Poradi pritiska izvana od samoga hidranta, dok su ga mišice stapke vukle u svoj perisark unutra, morao se je onaj gornji dio perisarka, koji je ispod hidranta, raširivati. To se je skraćivanje osi i raširivanje gornjeg dijela perisarka ponavljalo kod dalnjih generacija i prenašalo na potomke. Ne treba tek dokazivati, što se je moralo dogoditi onim polipima, koji se nisu mogli sakrivati u gornji rašireni dio perisarka. Rašireni dio perisarka bio je početak pravljenju čaške *(hydrotheca).*

Za vrijeme, kada se je još stvarala hidroteka, dok je naime trajalo samo raširivanje gornjega dijela perisarka, moglo je doći samo do djelomične retrakcije hidranta, kako to još i danas primjerice vidimo kod roda *Halecium*. Nu retrakcija je hidranta napredovala, a uz nju i stvaranje hidroteke, koja se je od generacije do generacije usavršavala tako, te je poslije mogla zaštićivati sve veći dio hidranta, a napokon i cio hidrant. Je li sada bilo takovih individua, koji bi osim ticala oko ustâ imali još i rasijanih po hidrantu, to su se ovi potonji, jer su postajali suvišni poradi razvoja hidroteke, morali polagano gubiti. Još sve to ipak nije maksimum u razvoju hidroteke, da se hidrant dobro zaštiti, jer je hidroteka gore uvijek otvorena.

Pošto je hidroteka iz početka bila mekana, to bi se za retrakcije hidranta sužívala, stvarajući uzdužne bore (Falte), i raširivala, te bi bora nestajalo, kad bi se hidrant van izvukao. Za ovakovoga neprestanoga suzivanja i raširivanja čaške, te nabiranja njezine stijene, morao bi se nužno i rub čaške valovito nabrati. Kada je čaška s vremenom ponešto otvrdnula, stvorili su se od tih valovitih nabora ruba pravi zubići. Kod suzivanja naime za otvrdnuća čaške rub je popucao, prestao je biti cjelovit i raspao se je u više, pukotinicama međusobom odijeljenih, zubića. (Slično sam vidio više puta kod *Obelia dichotoma* i nekih *Campanularia)*.

Čaška je vremenom posve otvrdnula, a rub joj je proviđen zubićima *(Clytia Johnstoni, Campanularia volubilis, Campanularia raridentata* i druge).

Uzmimo, da je gornji dio hidroteke ostao mekan, samo kao nastavak donjeg tvrđeg dijela hidroteke, to smo dobili za sužívanja i uzdužne bore, kojima zubići određuju stalan položaj, kako to slično vidimo kod *Campanularia volubiliformis*. Ovdje je postignuto to, da će se za potrebe čaška pomoću uzdužnih bora lakše moći sužiti i zapriječiti ulaz nepozvanome gostu. Evo što kaže Hincks u uvodu svoga djela o hidrotekama: „In many species the aperture is furnished with an operculum, which opens to allow of the passage of the polypite, and closses on its retreat. It is a simple but very effective contrivance, and exhibits two or three principal modifications. In some cases the margin of the calycle is cleft into a number of pieces, which converge and meet in a point, and form a more or less conical lid. *In others the cover is a membranous extension of the walls of the calycle, which falls into plaits*

or folds when the polypite withdraws, and so roofs over the opening" (l. c. p. XIV.).

One pak hidroteke, koje su posve otvrdnule, ne bi se mogle suživati, kad bi se hidrant retrahirao; zubići u ovome slučaju ne bi ništa pomogli i čaška bi bila vazda otvorena. Za to su se zubi produljili, na bazi svojoj prekinuli t. j. zglobno se odijelili od ruba čaške i sada se mogu slobodno gibati. Tako se je razvio pravi poklopac, koji se sklapa i rasklapa, kad se životinja retrahuje ili izvuče iz čaške.

Da je baš hidroteka od koristi po polipa, te da se je usljed naravnog izbora (selekcije) razvila i usavršila, dokazuju nam jasno brojevi. Odatle možemo zaključivati, kako polipi bez čaške *(Gymnoblastea)* ne mogu odolijevati neprijatelju, kao oni sa hidrotekom *(Catyptoblastea)*. Mi ćemo se odma uvjeriti, kako je ovih potonjih više i brojem vrstâ i brojem individuâ. Tako su Heller i Pieper mogli konstatovati samo 11 vrsta gimnoblastea, a 63 vrste kaliptoblastea; Graeffe 17 vrsta g., a 24 vrste k.; a i ja sam se mogao napokon uvjeriti o istinitosti svoje tvrdnje, jer sam konstatovao do 13 vrsta gimnoblastea u malo individua prema 38 vrsta kaliptoblastea u vrlo mnogo individua. Čini mi se po tom, da će s vremenom gimnoblastea, ako ne posve izčeznuti, a ono reducirati se na što manji broj vrsta.

Zastupnike hidroidpolipa možeš naći raširene po cijelome svijetu: u Sjevernom ili Njemačkom moru (Velika Britanija, Šetlantski i Normanski otoci, Norveška, Belgija, Francuska); u Atlantskom oceanu: kod Islandije, kod otoka Hebrida i u južnoj Africi. Spominju se zatim kod otoka Mauritiusa (Isle de France), Van Diemenove zemlje i Nove Selandije, pa u Sjevernoj Americi: Labrador, Nova Fundlandija, Masačusets, Nova Škotska, i napokon na Grenlandiji.

Na jugu Europe, u Sredozemnom moru, naći ih možeš kod Marsilje, Genove, Specije, Toskane, kod Elbe, Napulja, Mesine i drugdje.

Za nas je ipak od najveće važnosti *Jadransko more*, kojemu je u tom pogledu istražena zapadna i istočna obala. Važnije točke istraživanja faune hidroidpolipa jesu: Mleci, tršćanski zaljev, istarska obala (Piran, Rovinj), Kvarner, hrvatsko Primorje i dalmatinska obala sa svojim otocima.

Od opisanih ovdje vrsta hidroidpolipa nisu sve rasijane po svim morima naše zemlje. Ima ih, koje su se do sada mogle dokazati samo na jugu Europe kao: *Corydendrium parasiticum* (Napulj, Piran),

Tubularia mesembryanthemum u Sredozemnom i Jadranskom moru, *Halecium ophiodes* u Jadranskom moru, *Halecium robustum* u Sredozemnom i Jadranskom moru, *Aglaophenia octodonta* u Jadranskom moru, *Aglaophenia elongata* u Sredozemnom i Jadranskom moru, *Lafoëa parasitica* u Jadranskom moru, *Eudendrium racemosum* u Sredozemnom i Jadranskom moru, *Sertularia secunda* u Sredozemnom i Jadranskom moru, *Aglaophenia Kirchenpaueri* u Sredozemnom i Jadranskom moru.

Gymnoblastea.

Hidranti bez čaške, goli.

1	Ticala u vijence poredana	2
	Ticala rasijana	10
2	Ticala u jedan vijenac poredana	3
	Ticala u 2 ili više vjenaca poredana . . .	8
3	Polipi sa 4 uzdužne nabrekline	Spongicola (Stephanoscyphus)
	Polipi bez nabreklina	4
4	Polipi nerazgranjeni	5
	Polipi razgranjeni	6
5	Spolni se pupovi razvijaju u slobodne meduse i otkidaju	Podocoryne
	Spolni se pupovi ne otkidaju kao slobodne meduse	Stylactis, Wrigthia, Hydractinia
6	Polipi sa koničnim hipostomom	7
	Polipi sa trubljastim hipostonom	Eudendrium
7	Stabljika nerazgranjena ili rašljasta (furcatus)	Perigonimus
	Stabljika razgranjena	Bougainvillia
8	Ticala sva jednaka (končasta), u dva reda poredana	Tubularia
	Ticala nejednaka	9
9	Končasta ticala u jedan vijenac smještena i glavata ticala rastepena	Pennaria
	Ticala u tri vijenca smještena	Tiarella

10	Ticala nerazgranjena	11
	Ticala razgranjena	Cladocoryne
11	Sva ticala rasijana	12
	Ticala ili rasijana ili dijelom rasijana, a dijelom prešljenasta i glavata	Campaniclava (Syncoryne)
12	Ticala končasta	Clava, Corydendrium
	Ticala glavata	Coryne, Halobotrys

Calyptoblastea.

Vanjski hitinozni ovojak štiti i same hidrante u podobi čaške (hydrotheca).

1	Čaške stapkaste, slobodne	2
	Čaške bez stapke, sjedave	7
2	Hidranti posve retraktilni	3
	Hidranti samo djelomice retraktilni	Halecium
3	Hidroteke zvončikaste	4
	Hidroteke nisu zvončikaste	5
4	Hidroteke sa poklopcem	Lovenella
	Hidroteke bez poklopca	Campanularia, Clytia, Obelia, Gonothyraea
5	Hidroteke jajoliko-čunaste	Campanulina Opercularella
	Hidroteke cjevaste ili cilindrične	6
6	Hidroteke sa koničnim poklopcem	Calycella
	Hidroteke bez poklopca, rasijane	Lafoëa
7	Bez nematofora	8
	Sa nematoforima	11
8	Hidroteke pritisnute uz stabljiku i grane .	Thuiaria
	Hidroteke nisu pritisnute	9
9	Hidroteke sa poklopcem te alterniraju . .	Sertularella
	Hidroteke bez vanjskog poklopca	10

10	Gonoteke (ženske) na vrhu više manje u segmente rascijepane sa nutrnjim marsupijem	Diphasia
	Gonoteke sa jednostavnim ravnim otvorom bez nutrnjega marsupija	Sertularia
11	Stabljika sa prešljenastim grančicama . . .	Antennularia
	Grančice peraste	12
12	Spolne stanice sastavljaju korbule, nematofor pričvršćen sprijeda na čašci	Aglaophenia
	Spolne stanice ne sastavljaju korbule, nematofor nije sprijeda na čašci	Plumularia

Gymnoblastea, Allman.

1863. *Gymnotoca*, V. Carus.
1868. *Athecata*, Hincks.
1871. *Gymnoblastea*, Allman.

Bez hidroteke ili gonangia; hidranti i spolni pupovi goli. Planoblasti u obliku *Anthomedusa*.

Porodica: **Turridae.**

Trofosoma: Stabljika rudimentarna ili razvijena. Hidranti sa rastepenim končastim ticalima.

Gonosoma: Gonofori medusoidni.

Rod: Corydendrium, Van Ben.

Sertularia, Cavolini.

Trofosoma: Iz plazavog končastog korijena *(hydroriza)* uzdiže se stabljika *(hydrocaulus)*; hidranti vretenasti sa rastepenim končastim ticalima.

Gonosoma: Spolni pupovi na stabljici; medusa nepoznata.

Corydendrium parasiticum, (Cav.).

1785. *Sertularia parasitica*, Cavolini, Mem. Polyp., p. 83, t. VI. f. 8—13.
1832. *Syncoryne parasitica*, Ehrenberg, Corallth., Abhandl. d. Ak. Wiss. Berlin, p. 295.

1844. *Corydendrium parasiticum*, Van Beneden, Bul. Ac. Roy. de Bruxelles, p. 313.
1862. *Syncoryne parasitica*, Agassiz, Contr. Nat. Hist. U. S. vol. IV., p. 339.

Trofosoma: Stabljika jako razgranjena; hidranti sa vrlo rastežljivim hipostomom.

Gonosoma: Gonofori na kratkoj stapci na posljednjim grančicama. Razvijaju se u ljetu.

Cavolini je ovu vrstu našao pričvršćenu na *Eudendrium ramosum* u napuljskom zaljevu; Du Plessis.

Jadransko more: Piran (Dobiaš).

Porodica: **Corynidae.**

Trofosoma: Stabljika razvijena. Hidranti ili sa rasijanim ili sa više manje spiralno poredanim glavatim ticalima.

Gonosoma: Gonofori vrećasti.

Rod: Coryne, Gärtner.

Tubularia Gmelin.
Syncoryne, Ehrenberg.
Hermia, Johnston.
Capsularia, Cuvier.
Stipula, Sars.
Acrochordium, Meyen.

Trofosoma: Stabljika jednostavna ili granata, zaštićena hitinoznim perisarkom; hidranti kijačasti, ticala rasijana, glavata.

Gonosoma: Trusne kesice *(Sporosacs)* se razvijaju na tijelu hidranta.

Coryne pusilla, Gärtner.

1774. *Coryne pusilla*, Gärtner, in Pallas Sp. Zool. X, pag. 40, t. IV. f. 8.
1788. *Tubularia coryna*, Gmelin, Linné, p. 3834.
1792. *Tubularia muscoides*, Olivi, Zool. adr. p. 276.
1816. *Coryne glandulosa*, Lamarck, An. s. Vert., tome II., p. 62.
1832. *Syncoryne pusilla*, Ehrenberg, Corallenthiere, p. 294.
1838. *Hermia glandulosa*, Johnston, Brit. Zooph., p. 111.
1847. *Coryne pusilla*, Johnston, B. Z. p. 39, pl. II.
1847. „ *glandulosa*, Dalyell, Rem. An. Scotl. II. pl. XXI.

1853. *Coryne sessilis*, Gosse, Devonsh. Coast, p. 208, pl. XIV. f. 1—3.

1857. „ *ramosa*, Alder, North. et Durh. Cat. in Trans. Tynes. F. C. III. p. 102.

Trofosoma: Stabljika jako i nepravilno razgranjena, perisark prstenast, a nikakav tok ne stvara na dnu hidranta. Ima do 30 ticala.

Gonosoma: Trusne kesice okrugle, razvijaju se u svibnju i rujnu na hidrantu medju ticalima.

Ova je vrsta poznata iz obala Velike Britanije; u Sredozemnom moru: Toskana (Richiardi); Vilafranka (Du Plessis).

Jadransko more: Graeffe je našao u Trstu jednu vrstu *Coryne*, koja je posve slična po izvanjem habitu sa *Coryne pusilla*, jedino se razlikuje od ove namještajem gonofora, koji nisu samo na hidrantu, nego i na stabljici

Mleci (Olivi); Hvar (Heller). Ovu sam vrstu našao na algama u Crikvenici i Senju.

Porodica: **Cladocorynidae.**

Trofosoma: Hidrant sa dvije vrste ticala: jedan vijenac nerazgranjenih ticala oko usta i više vijenaca razgranjenih ticala na tijelu hidranta; jedna su i druga ticala glavata.

Gonosoma: Gonofori vrećasti i sjedavi.

Rod: Cladocoryne, W. D. Rotch.

Trofosoma: Stabljika razvita sa hitinoznim perisarkom.

Cladocoryne floccosa, Rotch.

1871. *Cladocoryne floccosa*, Rotch, in Ann. Nat. Hist. for March.

1883. *Polycoryne Helleri*, Graeffe, Boll. Soc. adr. vol. VIII. p. 202, t. 1.

Trofosoma: Stabljika jednovita ili malo razgranjena; perisark gladak ili slabo nepravilno prstenast. Hidrant dug, kijačast, ticala vrlo duga. Oko usta dolazi vijenac od 4—8 nerazgranjenih, glavatih ticala, a niže na hidrantu 3—4 prešljena razgranjenih glavatih ticala; 3 - 4 ticala u svakom prešljenu, a svako ticalo nosi po više kratkih glavatih grančica.

Gonosoma: Okrugli gonofori razvijaju se, kako veli Graeffe na hidrantu pod hipostomom između prvoga i drugoga prešljena

ticala u kolovozu i rujnu. Na onim objektima, koje sam ja promatrao, nisam nigdje našao gonofora, a to valjda zato, što su moji bili iz mjeseca travnja i svibnja, dok se još ne razvijaju gonofori.

Ova se vrsta spominje sa obale Normanskih otoka (Rotch).

Sredozemno more: Vilafranka (Du Pl.), Baja, secca di Gajola, Nisita (Du Pl.).

Jadransko more: Trst, na *Sargassum linifolium* (Graeffe); Rovinj i dalmatinska obala (Pieper); Zadar (Dobiaš); na *Cystosira* u Rovinju i Senju.

Porodica: **Bougainvilliidae.**

Trofosoma: Stabljika više ili manje razgranjena. Končasta su se ticala smjestila u jedan vijenac oko dna koničnog hipostoma.

Gonosoma: Spolni se pupovi otkidaju kao slobodne meduse.

Rod: Bougainvillia, Lesson

Eudendrium, Van Ben.
Atractylis, Strethill Wright.
Hippocrene (planoblast), Brandt.
Margelis (planoblast), Steenstrup.
Lizzia, Forbes.

Trofosoma: Stabljika razgranjena; hidrant vretenast sa koničnim hipostomom.

Gonosoma: Spolni se pupovi (planoblast) razvijaju na stabljici.

Bougainvillia muscus, var. Allm.

1863. *Perigonimus muscus*. Allman, in Ann. Nat. Hist. for January.
1864. *Bougainvillia muscus* Allman, in A. N. H. for. May.
1868. „ „ Hincks, Brit. Hydr. Zooph. p. 111.

Trofosoma: Perisark nabran i čašasto obuhvata u svojem produljenju tijelo hidranta sve do dna ticala. Na hidrantu je do 16 ticala izmjenice uspravnih i spuštenih.

Gonosoma: Gonofori se razvijaju u rujnu na dugoj stapci nedaleko ispod hidranta.

Dolazi u moru oko Velike Britanije.

Jadransko more: Istočna obala (Pieper); u Trstu je Graeffe našao ovu vrstu na *Sargassum*, ali je mogao nabrojiti samo 12 ticala, te je opazio mnogobrojne končaste stolone, kako se uzdižu vertikalno iz postranih grana i glavne osi. Slično je motrio Hincks,

a i ja sam na svojim objektima vidio nekakove izraske, kako niču na grănama. U Trstu ju je našao i Dobiaš, a ja sam na ovoj istoj našao briozoa *Pedicellina* (12—16 ticala).

U hrvatskom Primorju dolazi u Sv. Jurju kod Senja.

Bougainvillia fruticosa, Allm.

1858. *Eudendrium ramosum*, Allman, Proc. Roy. Soc. Ed. Dec. 6 th.
1864. *Bougainvillia fruticosa*, Allman, in Ann. N. H. for. July.
1868. „ „ Hincks, Brit. H. Zooph., p. 110.

Trofosoma: Stabljika jako razgranjena, perisark nije prstenast. Na hidrantu oko 14 ticala, a sam hidrant cilindričan.

Gonosoma: Gonofori kruškoliki na odužim stapkama, omotani nježno-hitinoznom kapsulom. Razvijaju se na zadnjim grančicama u jeseni.

Dolazi u Vel. Britaniji.

Sredozemno more: Vilafranka (Du Pl.).

Jadransko more: Novi.

Bougainvillia ramosa (Van Ben.).

1844. *Eudendrium ramosum*, Van Ben., Rech. sur les Tubul. p. 56, pl. IV.
1847. *Tubularia ramosa*, Dalyell, Rem. An. Scotl. I. pag. 64, pl. XI.
1859. *Atractylis ramosa*, T. S. Wright, Edinb. New Phil. Journ. for. Jan. vol. VIII. pl. I. f. 1, 2, 3.
1862. *Margelis ramosa*, Agassiz, Contr. Nat. Hist. U. S., v. IV., pag. 344.
1864. *Bougainvillia ramosa*, Allm., Ann. N. H. for May.
1868. „ „ Hincks, Brit. H. Z., pag. 109, pl. XIX. f. 2.

Trofosoma: Stabljika jako razgranjena, perisark na dnu grana slabo prstenast, te se produljuje na hidrantu sve do dna ticalâ. Hidrant nosi oko 12 ticala.

Gonosoma: Gonofori se razvijaju u jeseni na stapci na zadnjim grančicama.

Ova vrsta je nađena na školjkama, kamenju i drugim zoofitima u Engleskoj.

Sredozemno more: Vilafranka (Du Pl.).

Jadransko more: Piran ? (Pieper). Ja sam imao više pri-

mjeraka iz raznih lokaliteta kao: Rovinja, Sv. Jurja i Senja (2. draga), ali su svi ti bili tako slabo sačuvani, te se nije dalo točno ustanoviti, da je to baš ta vrsta.

Rod: Perigonimus, Sars.

Atractylis, Wright.

Trofosoma: Stabljika granata ili jednovita; hidranti vretenasti sa jednim vijencem končastih ticala na dnu koničnog hipostoma.

Perigonimus repens (Wright).

1857. *Eudendrium pusillum*, Wright, in Proc. Roy. Phys. Soc. Edin., vol. I, p. 231, pl. XI, f. 8, 9.

1858. *Atractylis repens*, Wright, in Proc. R. Ph. S. Edin. v. I. p. 450. pl. XXII, f. 4, 5.

1868. *Perigonimus repens*, Hincks, Brit. H. Zooph., p. 90, pl. XVI, f. 2.

Trofosoma: Stabljika uspravna, jednovita ili rašljasta (furcatus), gore nešto šira, čašasta. Hidranti mali, kijačasti, djelomice retraktilni sa 4—12—14 ticala.

Gonosoma: Stapkasti gonofori na stabljici.

Dolazi na *Sertularia* i puževima u Engleskoj.

Sredozemno more: Vilafranka, na kućici od *Nassa, Nerita, Trochus, Columbella* (Du Pl.).

Jadransko more: Na *Turritella* i drugim školjkama u Piranu, Rovinju, Hvaru, Visu (Pieper). U Trstu na *Murex* (Graeffe). U Rovinju na *Sertularella polyzonias, Halecium halecinum, Antennularia antennina*, na ciripediju *Conchoderma aurita*. U Crikvenici na *Tubularia larynx*. U hrvatskom Primorju dolazi na algama kod Sv. Jurja i Karlobaga.

Porodica: **Eudendridae.**

Trofosoma: Hidrant sa trubljastim hipostomom, a oko ovoga vijenac končastih ticala.

Gonosoma: Gonofori sjedavi i vrećasti.

Rod: Eudendrium, Ehrenberg.

Tubularia, Linnè.

Sertularia, Cavolini.

Trofosoma: Stabljika razgranjena, hidrant tikvičast ili jajolik. Ticala u jednom vijencu pod hipostomom

Gonosoma: Trusne kesice (Sporosacs) se razvijaju na hidrantu pod ticalima ili na stabljici; muški su više-klijetkasti a ženski jednoklijetkasti.

Eudendrium ramosum, (L.).

1758. *Tubularia ramosa*, Linn., Syst. Nat., edit. X., p. 1302.
1766. *Tubularia trichoides*, Pallas, Elenchus, p. 84.
1785. (?) *Sertularia racemosa*, Cavolini, P. mar. p. 160. t. VI. f. 1.
1792. *Tubularia ramosa*, Olivi, Zool. adr. p. 276.
1816. „ „ Lamk., An. Vert. II. p. 126.
1821. „ „ Lamx., Expos. Méth. p. 17.
1832. *Eudendrium ramosum*, Ehrbg., Corall. roth. Meer. p. 72.
1847. „ „ Johnst., Brit. Zooph. p. 46, pl. VI, f. 1—3.
1861. *Tubularia ramosa*, Grube, Ausfl. n. Triest, p. 131.
1868. *Eudendrium ramosum*, Hincks, B. H. Zooph., p. 82. pl. XIII.
1868. „ „ Heller, Zooph. etc.

Trofosoma: Stabljika jako razgranjena. Perisark čvrst, prstenast samo u početku granâ ili po svuda kod malenih grančica. Hidranti široki, proviđeni sa 20—24 duga ticala, koja često zakržljaju kod muškog stabla.

Gonosoma: Muške trusne kesice sastoje od 2 sferična receptakula, a razvijaju se na hidrantu stvarajući vijenac iza ticala, koja često zakržljaju i isčeznu. Ženske su trusne kesice kruškolike, te nastaju bez ikakvog reda ili na hidrantu ili na stabljici tik ispod hidranta. Razvoj trusnih kesica pada u travanj i svibanj.

Dolazi na školjkama i kamenju Vel. Britanije i Irske.

Sredozemno more: Genova (De Notaris), Toskana (R.), Vilafranka (Du Pl.).

Jadransko more: U tršćanskoj luci na drvenim stupovima u velikom broju, osobito u toplijim mjesecima (Graeffe), Mleci (Olivi); Kraljevica, na *Gorgonia verrucosa* i *Cellaria salicornoides* (Grube). Vis, Lastovo, Hvar, na školjkama i stupovima (Heller), Rovinj, Senj, Sv. Juraj, na kamenju i školjkama.

Eudendrium racemosum, (Cav.).

1785. *Sertularia racemosa*, Cavolini, Mem. dei Pol. Mar., Sprengel's German translation, p. 73, t. VI, f. 1.

Trofosoma: Stabljika jako i nepravilno razgranjena. Perisark prstenast na zadnjim (najmlađim) grančicama tik ispod hidranta. Na hidrantu oko 30 ticala.

Gonosoma: Muški gonofori 3°—5°klijetkasti, štitoliko namješteni na zakržljanim hidrantima; ženski gonofori bez ikakvog reda na zakržljanim hidrantima. Razvoj gonofora pada u proljeće i ljeto.

Sredozemno more: na kamenju kod Gajole, Napulja (Cavolini, Delle Chiaje, Weismann), Vilafranka (Du Pl).

Jadransko more: (Weismann); Trst (Graeffe); Rovinj, Novi, na kamenju.

Sa strane hidranta vidimo. kako raste zavinuti ili ravni i debeli nastavak, sličan ticalu, jedino je od ovoga mnogo veći i deblji, a katkada jednak samoj stapci hidranta Na kraju je nešto odebljan. Ovih nastavaka baš nije bilo mnogo, a na nekojima sam hidrantima vidio samo pupove, iz kojih bi se imali ti izrasci razviti. Graeffe i Weismann su također motrili ovakve nastavke, te ih je ovaj potonji godine 1882. otkrio na ovoj vrsti i opisao u pomenutom djelu.

Što su za pravo ti izrasci, kušao je protumačiti Weismann: „Da nisu ti rogovi ili izrasci, veli on, degenerirani gonofori, nego ustroji sui generis, dade se direktno pokazati Ponajprije njih imade odviše, a da bi prikazivali same degeneracije nerazvitih organa. Oni dolaze na muškim stablima na svakom devetom hidrantu, dok su na ženskima redji. *Njihova građa odgovara stanovitoj funkciji:* oni su aktivno gibivi, jer posjeduju jako razviti sloj *mišica*, a uz to su proviđeni *žarećim organima* (Nesselorgane), radi toga bismo ih već sada mogli zvati *Cnidophori* ili *Nesselorganträger*. U ektodermu ovih ustroja nalazimo više žarećih stanica (Nesselzellen), nego u ektodermu hidranta. Kod većine se *Cnidophora* koncentriraju te stanice prema vrhu organa, ali uz to dolaze i po čitavom *Cnidophoru*.

Ektoderm *Cnidophora* nije nikada perisarkom zaštićen, nego *posve gol*".

Po ovakovoj građi *Cnidophora* zaključuje Weismann, da oni ne mogu biti ništa drugo, nego *oružje za obranu* (Waffe), što nam osobito dokazuje jako razvijeno mišičje i jaka žareća baterija.

Da li po tom ovdje predleži kakav slučaj dimorfizma, ne može se još ipak sasvim utvrditi.

Eudendrium rameum, (Pallas.).

1766. *Tubularia ramea*, Pallas, Elenchus, p. 83.
1821. *Thoa Savignyi*, Lamx.. Expos. Méth., p. 15.
1847. *Tubularia ramea*, Dalyell, R. a. R. A., vol. I. p. 5, pl. VI, VII, VIII, IX.

1847. *Eudendrium rameum*, Johnst., Brit. Zooph., p. 45., pl. V, f. 1, 2.
1857. „ „ Alder, N. et D. C. in T. T. III, pag. 103.
1859. „ „ Wright, Ed. N. Ph. J., pl. II. f. 1—2.
1868. „ „ Hincks, B. H. Zooph., p. 80.

Trofosoma: Stabljika bogato razgranjena, kitno-granata. Perisark katkada slabo prstenast. Hidranti sa 20—24 bodljikavih ticala, ali koja često, imenito kod muških stabala, zakržljaju poslije razvoja gonofora.

Gonosoma: Muške trusne kesice dvo-klijetkaste, na tijelu hidranta smještene u vijencu ispod ticala; ženske trusne kesice jajolike, bez reda na stabljici ispod hidranta.

Dolazi na kamenju i školjkama u Norveškoj, kod Šetlanskih otoka, u Škotskoj, Engleskoj.

Sredozemno more: (Pallas); Marsilja (Marion), Toskana (R.).

Jadransko more: Crikvenica.

Porodica: **Podocorynidae.**

Trofosoma: Hidranti sa jednim vijencem končastih ticala na dnu koničnog hipostoma.

Gonosoma: Spolni se pupovi otkidaju kao slobodne meduse.

Rod: Podocoryne, Sars.

Hydra, Rud. Wagner.
Dysmorphosa (?), Philippi.
Hydractinia, Chr. Loven.

Trofosoma: Hidranti kijačasti.

Gonosoma: Gonofori na hidrantu ispod ticala.

Podocoryne carnea, Sars.

1757. *Hydractinia echinata*, Chr. Loven, Öfversigt af Kong. vet. Akad. Förhandl., p. 305, t. IV.
1846. *Podocoryne carnea*, Sars, Fauna lit. Norvegine, p. 4, pl. I.
1846. „ *albida*, Sars, ibidem, p. 7.
1851. „ *carnea*, Krohn, Wieg. Arch., p. 263.
1857. „ *tubulariae*, Sars, Middelhavets Litor. F., pag. 36, note.
1859. „ *carnea*, Allm., in Ann. N. H., July.
1864. „ *carnea*, Hincks, Rep. Brit. Assoc., p. 99.

*

Trofosoma: Tanki membranozni korijen (hydrorhiza), a iz nje strše maleni tupi hitinozni trnovi.

Izmedju ovih niču na korijenu hidranti i to: *sterilni* sa 12 ticala, a *proliferirajući* sa 4—6 ticala.

Gonosoma: Gonofori kratkostapkasti, u vijenac poredani, na manjim hidrantima pod ticalima u proljeću.

Ova je vrsta poznata iz čitave europejske obale na kamenju i kućicama puževa: *Nassa reticulata*, *Turritella*.

Sredozemno more: Napulj (Sars, Krohn, Costa, Du Plessis).

Jadransko more: Rovinj (Pieper); Trst, na *Nassa reticulata* i *Murex* (Graeffe), na *Nassa mutabilis* (Dobiaš).

U hrvatskom Primorju dolazi u Senju i Sv. Jurju.

Porodica: **Tubulariidae.**

Trofosoma: Hidranti sa končastim ticalima u 2 cikla.

Gonosoma: Gonofori sjedavi, vrećasti, ili se otkidaju kao slobodne meduse.

Rod: Tubularia, L.

Parypha, Agassiz.,
Thamnocnidia, Agassiz.

Trofosoma: Stabljika jednovita ili granata; hidranti tikvičasti. oštro lučeni od stapke. Ticala končasta u 2 cikla: oralni su kraći od aboralnih. Hipostom koničan.

Gonosoma: Gonofori na razgranjenoj stapci, tvoreći grozd, razvijaju se između proksimalnog i distalnog vijenca ticala.

Tubularia larynx, Ellis et Solander.

1755. *Corallina tubularia laryngi-similis*, Ellis, Coral., p. 30, pl. XVI, f. 6.
1766. *Tubularia muscoides*, Pallas, Elench., p. 82 (nec Linn.).
1786. „ *larynx*, Solander's Ellis, Zooph. p. 31.
1816. „ „ Lamk., An. s. V. p. 126.
1832. *Eudendrium bryoides*, Ehrbg., Corallth., Abh. Ak. W. Berl. p. 296.
1832. „ *splendidum (?)*, Ehrbg., Corallth., Abh. Ak. W. p. 296.
1836. *Tubularia gracilis*, Harvey, in Proc Zool. Soc. Lond., No. 41, p. 54.

1847. *Tubularia gracilis*, Johnst., B. Z., II. ed., p. 52, pl. IV, f. 3—5.
1847. „ *larynx*, Johnst., B. Z., II. ed., p. 50, pl. III. f. 3 i pl. V.
1847. „ „ Dalyell, R. a. R. Anim., vol. I. p. 42, pl. V.
1857. „ „ Alder, Catal., p. 16.
1857. „ *gracilis*, Alder, Catal., p. 17.
1861. „ *larynx*, Grube, Ausflug n. Triest, p. 131.

Trofosoma: Stabljika granata; grane tu i tamo prstenaste; cenosark tvori ovratnik ispod hidranta. Donjih ticala oko 20 dugih, i gornjih 14—20, u 2 vijenca poredanih.

Gonosoma: Spolni pupovi jajoliki, bez gastrovaskularnih kanala.

Našli su je na kamenju i na drugim hidroidama u Engleskoj, Skandinaviji, Belgiji.

Sredozemno more: (Pallas); Elba (Kirchenpauer), Toskana (R), Napulj (Delle Chiaje), Vilafranka (D. Pl.), Mesina (Gegenbaur).

Jadransko more: Na raznim predmetima u moru, ljušturama, koralima, algama i kamenju. Zapadna obala (Olivi), istočna obala (Heller), Rovinj, na *Halecium halecinum;* Kraljevica, na *Gorgonia verrucosa* (Grube); Crikvenica, na kamenju.

Tubularia mesembryanthemum, Allm.

Trofosoma: Stabljika jednovita nije prstenasta Cenosark tvori ovratnik ispod hidranta. Stabljika nije po duljini strijekana. 20—24 donja ticala i 24 gornja ticala, u 2 reda smještena.

Gonosoma: Gonofori tvore uspravne guste hrpe. Razvijaju se u lipnju do studenoga.

Sredozemno more: na pećinama kod Marsilje (Marion); Spezia (Allm.); Vilafranka (D. Pl.).

Jadransko more: Istočna obala između Trsta i Rovinja (? Pieper); Trst, u luci na stupovima (Graeffe); Rovinj.

Calyptoblastea, Allman.

1863. *Skenotoca*, J. V. Carus.
1868. *Thecaphora*, Th. Hincks.
1871. *Calyptoblastea*, G. Allman.

Hidranti sa hidrotekom; spolni pupovi stvaraju gonangija. Planoblasti u obliku *Leptomedusa.*

Porodica: **Campanulariidae.**

Trofosoma: Stabljika jednovita ili granata. Hidroteke terminalne, stapkaste, zvončikaste ili čaškaste. Hidranti sa velikim trubljastim hipostomom (proboscis).

Rod: Campanularia, Lamarck.

Laomedea, Lamouroux.
Silicularia (?), Meyen.
Orthopyx s, Agassiz.
Laomedea, Agassiz.

Trofosoma: Iz končastog se korijena uzdiže jednovita ili granata stabljika. Hidroteke zvončikaste i prozirne, bez operkula. Hidranti sa koničnim hipostomom.

Gonosoma: Gonoteke se razvijaju ili na stablu ili na stolonama.

Campanularia volubilis, (L.).

1767. *Sertularia volubilis*, Linnè, Syst. Nat. ed. XII. p. 1311.
1816. *Clytia volubilis*, Lamour., Cor. flex., p. 202.
1857. *Campanularia volubilis*, Alder, North. and Durh. Cat. in Trans. T. F. C. III. p. 125. pl. IV, f. 7.

Trofosoma: Spiralno zavinuta stabljika. Pod hidrotekom dolazi okrugao mali članak; hidroteke uske, cilindrične, a na rubu dolazi 10 malih, tupih zubića.

Gonosoma: Gonoteke kratko-stapkaste, čuturaste, sa dugim uskim vratom.

Dolazi na zoofitima u dubokom moru kod Engleske, Islandije, Sjeverne Amerike (Atlantski ocean).

Sredozemno more: Genova (De Notaris).

Jadransko more: Trst, na *Myriozoon truncatum,* u prosincu (Graeffe). Ona vrsta, koju Heller opisuje pod ovim imenom, jest *Clytia Johnstoni,* a razlikuje se od ove vrste gonotekama.

Rovinj, na *Cystosira;* Senj, na *Dictyomenia volubilis.*

Campanularia volubiliformis, Sars.

1852. *Campanularia volubilis,* var., Hincks, Ann. N. H. XI. pag. 180.
1854. „ *sp.*, Gegenbaur, Zur Lehre vom Generat. t. I. f. 8.
1857. „ *Hincksii,* Alder, N. et D. C. in T. T. III. p. 127. pl. IV.

1857. *Campanularia volubiliformis,* Sars, Middelh. Litt. Fauna pag. 47.

1868. „ *Hincksii,* Hincks, B. H. Z. v. I. p. 162, pl. XXIV, f. 3.

Trofosoma: Dugačka stapka, na dnu i ispod hidroteke jasno, a u sredini slabo prstenasta ili glatka, ili ispod hidroteke samo jedan prsten, čitava stapka ravna, jedino na dnu 1—2 prstena; ovakvi potonji su bili moji objekti (vidi: Hincks, pl. XXIV, f. 3). Hidroteke visoke i široke, stijene su im istosmjerne, a sa ovima opet dolaze istosmjerno pruge (bore) po duljini čaške. Rub je hidroteke providjen tupim, gore odrezanim zubićima.

Gonosoma: Gonoteke produljene, prema vrhu se nešto sužuju, sa 10—12 popriječnih prstena.

Vrlo je rijetka; dolazi na zoofitima, ali ne u dubokoj vodi, kod Velike Britanije

Sredozemno more: Mesina (Gegenbaur, Sars).

Jadransko more: Na raznim morskim algama kod Hvara (Hr.); Rovinj, na *Zostera marina*, i raku *Maja verrucosa.*

U hrvatskom je Primorju dosta česta: Senj, na *Sargassum;* Sv. Juraj, na *Gracilaria compressa;* Novi.

Kod ove je vrsti opaziti uzdužne paralelne bore, koje držim da nastaju, kad se životinja retrahuje, a hidroteka poradi toga suži. To je ovdje lako moguće, jer je gornji dio hidroteke samo mekani nastavak donjeg tvrđeg dijela, od kojeg je i odijeljen popriječnom prugom. Tako sam mogao naći na hidroteci pomenute bore samo tada, kada se je hidrant retrahovao i hidroteka sužila, a nije ih bilo, kada se je hidrant izvukao iz hidroteke. Zašto su baš te bore vazda na istom mjestu, uzrok su tomu zubi ruba, koji im određuju uvijek isti položaj. (Više se o tom govori u općenitom dijelu, gdje je govor o hidroteci).

Campanularia caliculata, Hincks.

1857. *Campanularia breviscyphia*, Sars, Middelhavet's Litt. Faun. p. 49, pl. I, f. 12, 13.

1857. *Campanularia caliculata*, Allm., Proc. Roy. Soc. Edinb.

1860. *Clytia poterium*, Agassiz, N. H. U. S. IV. p 237, pl. XXVIII.

1863 *Campanularia caliculata*, Hincks, Ann. N. H for March.

Trofosoma: Stabljika nejasno prstenasta, sa jednim jasnim prstenom pod hidrotekom; hidrotekama je rub cjelovit, a inače su zvončikaste i debelostjene.

Gonosoma: Gonoteke kratko-stapkaste, nepravilno jajolike, na vrhu odrezane, sa širokim otvorom. C. F. Jickeli je našao u ektodermu ove vrste ameboidalne stanice (Morphol. Jahrbuch, 8. Bd., str. 632).

Dolazi na algama *(Delesseria sanguinea)* u Atlantskom oceanu, u Europi i Americi.

Sredozemno more: Mesina (Sars); Toskana (R.).

Jadransko more; Na *Sargassum*, na jugu istočne obale (Pieper); na *Ulva*, *Cystosira* i drugim algama u Trstu (Graeffe); Rovinj, na *Cystosira* i raku *Dromia vulgaris;* Crikvenica, na *Cystos. abrotanifolia;* Senj, Sv. Juraj, Karlobag, na kamenju, na *Sargassum* i drugim algama u jako velikom broju.

Campanularia gigantea, Hincks.

1866. *Campanularia(?) gigantea*, Hincks, Ann. N. H. for October, XVIII, p. 297.

Trofosoma: Stabljika nježna, na dnu i pod čaškom prstenasta, nepravilno i slabo granata; grane uspravne. Hidroteke velike, dva put dulje nego široke, a na rubu dolaze tupi zubi.

Gonosoma: Gonoteke nepoznate.

Dolazi na školjkama u moru Engleske (otok Arran).

Jadransko more: Rovinj i Vis, na briozoima *Eschara* (Pieper). Rovinj; samo u par eksemplara našao sam ovu vrstu na briozoima.

Campanularia flexuosa, Hincks.

1838. *Laomedea gelatinosa*, Couch, Corn. Faun. p. 39, pl. X. f. 2.
1847. „ „ var. α, Johnst., B. Z. p. 105, pl. XXV, f. 3, 4.
1861. „ *flexuosa*, Hincks, Devon a. Corn. Cat. Ann. N. H. VIII. p. 260.
1864. „ „ *Allman*, Ann. N. H. for May.
1868. *Campanularia flexuosa*, Hincks, Brit. Hydr. Zooph. vol. I, p. 168, pl. XXXIII.

Trofosoma: Stabljika končasta, isprevijana, perasta ili nepravilno granata, na dnu i povrh prikopčaja granâ prstenasta; hidroteke alterniraju, velike su i gore široke, čašaste, a rub im je cjelovit; stapka njihova ima 6—7 prstena. Ticala su na dnu spojena finom opnicom.

Gonosoma: Gonoteke u pazuhici granâ, velike, produljene, jajolike, na vrhu široke i odrezane, na stapci od 3—4 prstena.

Dolazi u moru Vel. Britanije; Normanski otoci (Jersey).

Sredozemno more: Marsilja (Marion).

Jadransko more: Na mnogim mjestima istočne obale (Pieper). U vrlo velikom broju dolazi po svuda na kamenju i algama u društvu drugih hidroidpolipa i briozoa; Rovinj, na *Cystosira*. U hrvatskom Primorju: Rijeka, Kraljevica, Crikvenica, Novi; na *Cystosira abrotanifolia* u Senju; Sv. Juraj, Karlobag.

Campanularia angulata, Hincks.

1868. *Campanularia angulata*, Hincks, B. H. Zooph., p. 170, pl. XXXIV. f. 1.

Trofosoma: Stabljika tanka, perasto ili vrlo slabo razgranjena, međučvorovi dugi; prsteni dolaze na dnu i povrh prikopčaja stapke. Često se događa, da se stablo ne dokanča pravilno hidrotekom, nego izraste u *dugu viticu* (Hincks, l. c. pl. XXXIV, f. 1.). Hidroteke alterniraju, imadu oblik zvonca, a stapka im je ili sva prstenasta ili samo na dnu i ispod hidroteke, a u sredini glatka.

Gonosoma: Gonoteke nepravilno jajolike, razvijaju se na stolonama, na kratkoj stapci od 3—4 prstena. Poznata je iz mora kod Normanskih otoka (Jersey), Irske, Engleske.

Jadransko more: Na *Zostera* u Trstu (Graeffe); na *Cystosira* i ciripediju *Lepas anatifera* u Rovinju; na *Mytilus galloprovincialis* i *Cystosira* u Bakru; na *Cystosira* u Kraljevici; u Novom; na kamenju i na *Zostera* u Senju; na *Sargassum* i *Cystosira* u velikom broju u društvu za briozoima u Sv. Jurju.

Spomenusmo, da često vidimo kod ove vrste, kako se stabljika dokanča dugom viticom (Ranke). Hincks takodjer spominje ove vitice (l. c. p. 170.), a *Fraipont*[1] im je pače istražio i finiju građu. *Weismann* na mjestu gdje govori o *Cnidophorima* kod *Eudendrium racemosum*, spominje i ove vitice kod *Campanularia angulata*: „Ti *organes appendiculaires* (Fraipont) ili *tendril-like claspers* (Hincks) nisu nikakovi *Cnidophori*, jer ne samo da nemaju žarećih organa, nego je vitica također posvuda zaštićena prilično debelim perisarkom, što bi djelovanje žarećih organa (kada bi ovih i bilo) učinilo prema vanjštini nemogućim“ (l. c. str. 13.).

Po tom su nam ovi ustroji za sada još zagonetni, jer im značenja ne znamo.

---

[1] J. *Fraipont*: „Recherches sur l' organisation histologique et le developpement de la Campanularia angulata“. Arch. zool. expèr. et gen., Tom. VIII, 1879—80.

Campanularia raridentata, Alder.

1757. Suppl. North. and Durh. Cat. in Trans. Tynes F. C. V. p. 238, pl. X, f. 8.
1868. *Campanularia raridentata*, Hincks, B. H. Z. p. 176, pl. XXVI, f. 2.

Trofosoma: Stabljika kratka, nerazgranjena, gore i dolje prstenasta, dolje se bulbozno raširuje i obuhvata stolone. Hidroteke jako duge i uske, prema dnu se sužuju a gornji je rub providjen sa 5—6 zubi.

Cijeli polip je krasan i posve proziran.

Gonosoma: Gonoteke nepoznate.

Dolazi na drugim zoofitima u dubokom moru Velike Britanije.

Jadransko more: U Trstu, na kamenju i školjkama u većoj dubini (Graeffe). U Senju, na kamenju; u Crikvenici na *Eudendrium rameum.*

Campanularia neglecta, (Alder).

1857. *Laomedea neglecta*, Alder, North. et Durh. C. in T. T. F. C. III p. 123, pl. V. f. 1, 2.
1861. „ „ Hincks, Devon et Cornw. Cat., Ann. N. H. VIII.
1868. *Campanularia neglecta*, Hincks, B. H. Z. vol. I. p 171, pl. XXX, f. 2.

Trofosoma: Sve nježno i maleno; stabljika ima 4 7 prstena povrh prikopčaja stapke. Hidroteke uske i visoke, na prstenastoj stapci. Rub je hidroteke izvučen u 8 *dvošiljatih* (bimucronated) zubića.

Gonosoma: Gonoteke kruškolike, u pazuhici ili gdje drugdje na grančici, na kratkoj prstenastoj stapci

Dolazi na kamenju i na drugim zoofitima u moru Vel. Britanije.

Jadransko more: Do sada u opće nije bila poznata ova vrsta kod nas na jugu. Interesantna je radi svojih dvošiljatih zubića.

Dr. Car i ja vidjeli smo je pričvršćenu na *Bougainvillia ramosa* iz Senja, ali je vrlo rijetka.

Rod: Clytia, Lamouroux.

Campanularia, Lamarck.
Clytia, Agassiz, Van Beneden.

Trochopyxis, Agassiz.
Platypyxis, Agassiz.
Eucope, Gegenbaur.
Campanularia, Allman

Trofosoma: Hidroteke zvončikaste, bez operkula. Hidranti sa širokim trubljastim hipostomom.

Gonosoma: Gonoteke na stolonu ili na stablu. Razvijaju se slobodne meduse.

Clytia Johnstoni, (Alder).

1786. *Sertularia volubilis*, Ellis et Soland. Zooph. p 51, pl. IV. f. e, f, E, F.
1838. *Campanularia volubilis* Couch, Corn. Faun. pt. 3. p 40, t. XI. f. 1.
1847. „ „ Johnst. B. Z p. 107—108, woodcut, f. 18.
1852. „ „ Hincks, Ann. N. H for July, pl. III, f. 5.
1857. „ *Johnstoni*. Alder, North. et Durh. C. in T. T. V p. 126, pl. IV, f. 8.
1858. „ „ Wright, Ed. New. Phil. Journ for April.
1858 „ „ Allm., Proc. Roy. Soc. Ed. for Dec. 6.
1860. *Clytia bicophora*. Agassiz, N. H. U. S. IV. p. 304, pl XXVII, f. 8, 9; pl. XXIX, f. 6—9.
1868 *Campanularia volubilis*, Heller, Die Zooph etc. p. 46.

Trofosoma: Stabljika duga, jednovita ili slabo granata, prema dnu i vrhu prstenasta, a u sredini ravna ili slabo prstenasta. Hidroteke široke, a na rubu 10 12 trouglatih zubića.

Gonosoma: Gonoteke jajolike, duboko prstenaste, gore odrezane i kratko stapkaste, razvijaju se na stolonu, a katkada na stablu.

Dolazi u Belgiji, Britaniji, Norveškoj i Franceskoj.

Jadransko more: Hvar (Hr.); Trst, na stupovima, na *Mytilus* i *Eudendrium* (Graeffe). U Rovinju, na *Cystosira*, na racima *Pisa Gibsii Lepas anatifera, L. Hilii, Conchoderma aurita.*

U hrvatskom Primorju je dosta česta: na kamenju, algama, školjkama; Crikvenica, na *Cystosira*; Senj, na *Cystosira abrotanifolia* i *Codium tomentosum.*

Rod: Obelia, Péron et Lesueur.

Laomedea, Lamouroux.
Campanularia, Lamarck.
Monopyxis, Ehrenberg.
Thaumantias, Forbes.
Eucope, Gegenbaur.
„ Agassiz.
Obelia M' Crady.
„ Agassiz.
„ Allman.

Trofosoma: Stabljika razgranjena, hidroteke bez poklopca, zvonu nalične.

Gonosoma: Gonoteke na stabljici i granama. Razvijaju se slobodne meduse.

Obelia geniculata, (L).

1767. *Sertularia geniculata*, Linnè, S. N. ed. XII. p. 1312.
1785. „ „ Cavolini, P. m. p. 205, t. VIII, f. 1—4.
1816. „ „ Lamk., An. s. Vert. II. p. 149.
1816. *Laomedea geniculata*, Lamx., Cor. flex., p. 208.
1832. *Monopyxis geniculata*, Ehrbg., Corall. roth. Meer. p. 73.
1845. *Laomedea geniculata*, Costa, F. di N. p. 16, t. X. f. 1.
1847. „ „ Johnst., B. Z. p. 103, pl. XXV, f. 1, 2.
1853. „ „ Gosse, Dev. Coast. p. 84, pl. IV.
1860. *Eucope diaphana*, Agassiz, N. H. U. S. IV, p. 322, pl. XXXIV, f. 1—9.
1864. *Obelia geniculata*, Allm., Ann. N. H. for May.
1865. *Eucope alternata*, A. Agassiz, North Am. Acaleph. p. 86.
1868. *Laomedea geniculata*, Heller, Zooph., p. 45.

Trofosoma: Stablo slabo razgranjeno, grane kratke, prstenaste. Stabljika člankovito odebljana. Hidroteke okrenuto čunjaste, dulje nego šire, rub im je cjelovit, a stapke kratke od 4—6 prstena.

Gonosoma: Gonoteke u pazuhici, žaraste, na kratkoj prstenastoj stapci.

Dolazi u Atlantskom oceanu: Masačusets, Labrador.

Sredozemno more: Nica (Péron et Lesueur); Toskana (R.), Napulj (Spagnolini, Costa, Du Plessis).

Jadransko more: Hvar (Hr.); na *Cystosira* u Senju i Sv. Jurju.

Obelia dichotoma, (L.).

1766. *Sertularia longissima,* Pall., Elenchus, p. 119.
1767. „ *dichotoma,* Linn., S. N. ed. XII. p. 1312.
1785 „ „ Cavolini, P. m. p 194, t. VII.
1786. „ „ Ellis et Sol., Z., p. 48.
1792. „ „ Olivi, Zool. adr. p. 289.
1816. *Campanularia dichotoma,* Lam., A. s. V. t. II, p. 113.
1816. *Laomedea* „ Lamx., Cor. flex., p. 207.
1845. „ „ Costa, F. di N. p. 15, t. X, f. 2.
1847. „ „ var. α, Johnst., B. Z. p. 102, pl. XXVI. f. 1, 2.
1857. „ „ Alder, N. a. D. Cat. Trans. T. III. p. 121.
1868. „ „ Heller, Zooph. p. 44.

Trofosoma: Stabljika končasta, skoro uspravna, nepravilno razgranjena, grane na dnu prstenaste, često vrlo duge, te više manje razgranjene. Hidroteke alterniraju, široke su. gore poliedrične, na prstenastim stapkama.

Gonosoma: Gonoteke u pazuhici, tanke, prema vrhu šire, sa koničnim epistomom.

Ova vrsta dolazi često nametnički na drugim zoofitima: Europejska obala Atlantskog oceana.

Sredozemno more: Napulj (Cav., D. Ch., Costa, Du Pl.).

Jadransko more: Mleci (Olivi), Piran (P. Titius), Hvar (Hr.). U hrv. ju je Primorju naći na kamenju: Rijeka, Senj.

Obelia gelatinosa, (Pallas).

1766. *Sertularia gelatinosa,* Pallas, Elenchus, p. 116.
1785. „ *dichotoma,* Cavolini, Polip. mar., p. 194, t. VII, f. 5—8.
1816. *Laomedea gelatinosa,* Lamx., Corall. flex., p. 92.
1816. *Campanularia gelatinosa,* Lamk., An. s. Vert, p. 134.
1847. *Laomedea* „ var. β, Johnst., B. Z. p. 104. pl. XXVII, f 1.
1868. „ „ Heller, Zoophyten, p. 45.
1868. *Obelia gelatinosa,* Hincks, B. H. Z. p. 151, f. 17, pl. XXVI. f. 1.

Trofosoma: Stabljika razgranjena, grane izmjenične, na dnu prstenaste; čaške male, uske, na prstenastim stapkama. Rub otvora

čaške proviđen sa 10—12 *dvošiljatih* zubića (vidi Hincks, l. c. p. 152, f 17).

Gonosoma: Gonoteke u pazuhici, jajolike, sa izvučenim otvorom. Dolazi u Engleskoj.

Jadransko more: Hvar (Heller).

Rod: Gonothyraea, Allman.

Laomedea Lamouroux.

Trofosoma: Stabljika uspravna i granata; hidroteke zvončikaste i prozirne, hidranti sa koničnim hipostomom.

Gonosoma: Spolne su životinje medusne, sa jednim vijencem ticala.

Gonothyraea Lovéni. Allman.

1834. *Campanularia dichotoma*, Lister, Phil. Trans.
1837. „ *geniculata*, Lovén, Wiegmann's Archiv.
1844. „ „ V. Ben., Mém. sur les Campan. p. 34, pl. III, f. 1.
1851 „ „ Schultze, Müller's Archiv.
1859 *Laomedea dichotoma*, T. S. Wright, Ed New. Ph. Journ. for Jan.
1859. „ *Lovéni*, Allm., Ann N. H. for August.
1864. *Gonothyraea Lovéni*, Allm., Ann. N. H. for May.
1866. *Campanularia dichotoma*, V. Ben., Faune Litt. de Belg. Polypes, p 156, pl. XV, f. 1—4.

Trofosoma: Stabljika isprevijana, nepravilno razgranjena, prstenasta nad prikopčajem granâ, kao što i grane same. Hidroteke izmjenične, duboke, uske, a na rubu dolazi 10 malih tupih zubića. Stapke su svuda prstenaste.

Gonosoma: Gonoteke široke, gore odrezane, okrenuto čunjaste, u pazuhicama, na prstenastim stapkama.

Dolazi u Njemačkom moru na *Fucus*: Velika Britanija, Belgija i Švedska (Lovén).

Sredozemno more: Marsilja (Marion).

Jadransko more: Na kamenju i algama; Sv. Juraj, Senj.

Porodica: **Lafoëidae.**

Trofosoma: Stabljika jednostavna ili granata, uspravna ili plazava. Hidroteke sjedave ili kratko-stapkaste, cjevaste i bez poklopca. Hidranti cilindrični sa koničnim hipostomom.

Gonosoma: Gonoteke nepoznate.

Rod: Lafoëa, Lamouroux.

Calycella, Hincks.

Lafoëa pocillum, Hincks.

1868. Hincks, Brit. Hydr. Zooph p. 204, pl. XL, f. 2.

Trofosoma: Hidroteke male, prema vrhu nešto iskrenute, na dnu nabuhle, rub cjelovit. Stapke dosta duge i prstenaste, a katkada se malo razgranjuju.

Gonosoma: Gonoteke nepoznate.

Dolazi na obali Vel. Britanije, Labradora.

Sredozemno more: Toskana (R.).

Jadransko more: na algama u Rovinju.

Lafoëa parasitica, Ciamician.

Zeitschrift für wiss. Zoologie, 33. Bd. p. 673, t XXXIX, Leipzig 1880.

Trofosoma: Hidroteke velike, cilindrične čaše, bez poklopca. Stapka je 2°—4ro prstenasta. Hidroteke niču izmjenice desno i lijevo u skoro jednakim razmacima tako, da uvijek stoje između 2 postrane grane stanodavca *Aglaophenia*-vrste. Hidranti cilindrični sa vijencem od 10—12 ticala. Korijen (hydrorhiza) je plazav.

Gonosoma: Gonoteke nepoznate.

Važno je, da se *Lafoëa parasitica* nikada ne ovija oko stabljike od *Aglaophenia* ili *Plumularia*, nego uvijek plazi na istoj strani. Perisarci su obaju hidroidpolipa, naime stanodavca i nametnika, tako čvrsto međusobno srasli, da ih se nikako ne dade rastaviti, a da ih se pri tom ne rastrga.

Gonotekâ još nije nikomu pošlo za rukom otkriti, zato misli Ciamician glede rasploda ovo: „Može biti, veli on, da je rasplod kod ove vrste kao kod jedne campanularide *Schizocladium ramosum*, Allman, nespolnim putem t. j dijeljenjem, ili da spolna generacija poslije čitavog jednog niza nespolnih generacija opet nastupi. Za ovo govori okolnost, što kod *Lafoëa parasitica* perisark stablolika korijena ostaje na gornjem kraju otvoren, ne završuje se hidrantom, te bi tu lako moglo nastupiti odijeljenje jednoga komada cenosarka u podobi t. zv. *frustel*“. (l. c. p. 673.).

Da nam taj čitavi proces kod rasploda, kako ga naslućuje Ciamician za *L. parasitica*, bude jasniji, evo kako se taj opravlja kod *Schizocladium ramosum*: Osim postranih grana, koje nose

hidrante, razvija *Schizocladium* više grana bez hidranta. Na distalnom se kraju ovih grana (bez hidranta), u stanovitoj udaljenosti, ureže prsten. Konačno se taj dio cenosarka *free frustele* (Allman) sličan planuli (ali bez trepavica) posve odijeli od grane i padne na dno. Tu se sada pričvrsti izlučivši sekret, izraste u stapku, na kojoj ispupa prvi hidrant. Na ovom nastanu poslije ostali postrani hidranti.

Pita se, imade li kakvu korist stanodavci ili *Lafoëa* od ovakvog zajedničkog načina života? Koliko je opaziti, biti će, da samo *L. parasitica* ima koristi; ona uz *Aglaophenia* i *Plumularia* nalazi zaštite, te je po tom nametnik. Kod *L. parasitica* vidimo ugledne i velike hidroteke, dok su hidroteke kod drugih *Lafoëa*-vrsta, koje žive na algama i kamenju, vrlo ograničenih dimenzija. *L. parasitica* po tom nalazi kod *Aglaophenia* i *Plumularia* moćnu zaštitu, te može slobodno razvijati ovako velike hidroteke. Tko pak pozna *Aglaophenia*- i *Plumularia*-vrste, njihove velike žareće organe (nematofore), znade lako, kojim načinom mogu ove zaštićivati *L. parasitica*. *L. parasitica* ne dolazi nikada sama za se na kamenju i algama.

L. parasitica nije dugo poznata. U listopadu godine 1879. ju je Ciamician u Trstu otkrio na jednoj *Aglaophenia*-vrsti. Poslije ju je našao Graeffe također u Trstu na *Aglaophenia octodonta*, a ja sam je ove godine našao na *Aglaophenia octodonta* u Senju.

Lafoëa dumosa, (Fleming).

Sertularia dumosa, Flem., Edinb. Phil. Journ. II. p. 83.
Campanularia dumosa, Flem., Brit. An., p. 548.
1766. *Sertularia volubilis*, β, Pallas, Elench., p. 123.
1821. *Lafoëa cornuta (?)*, Lamx., Expos. Méth. p. 5, pl. CXV. f. 12—14.
1838. *Cornularia dumosa*, Couch, Zooph. Cornw., p. 39.
1843. *Capsularia* „ Gray, Cat. B. M. Radiata, p. 88.
1847. *Campanularia dumosa*, Johnst., B. Z. p. 113, pl. XXVII, f. 2, 5.
1861. *Calicella dumosa*, Hincks, Cat. D. et C. Zooph., p. 23.
1862. *Lafoëa* „ Sars, Videnskab. Forhandl.
1864. „ „ Allm., Ann. N. H. f. May.
1868. *Campanularia dumosa*, Heller, Zooph., p. 46, t. III. f. 1.

Trofosoma: Čaške duge, prema dnu se sužuju, skoro sjedave, sa ravnim otvorom; dolaze s obiju strana stabljike, koja se katkada razgranjuje.

Gonosoma: Gonoteke nepoznate.

Poznata je iz europske i sjevero-američke obale Atlantskog oceana.

Jadransko more: Primošten (Hr.); na *Zostera* u Rovinju, na kamenju i algama u Senju, Sv. Jurju i Kraljevici.

Rod: Calycella, Hincks.

Campanularia, Lamk.

Trofosoma: Cjevasta plazava stabljika ili uspravna, granata. Hidroteke cjevaste, sa poklopcem.

Hidranti cilindrični sa čunjastim hipostomom.

Calycella syringa, (L.).

1766. *Sertularia volubilis*, Pallas, Elench., p. 122.
1767. „ *syringa*, Linné, S. N. ed. XII. p. 1311.
1786. „ *repens*, Ellis et Sol., Zooph., p. 52.
1816. *Clytia syringa*, Lamx., Cor. flex., p. 203.
1816. *Campanularia syringa*, Lamk., An. s. Vert., II. p. 132.
1843. *Capsularia syringa*, Gray, Cat. B. M. Radiata, p. 86.
1844. *Campanularia syringa*, v. Ben., Camp., p. 37, pl. III. f. 9.
1847. „ „ Johnst., B. Z., p. 110, woodcut 19.
1860. *Wrightia syringa*, Agassiz, N. H. U. S. IV. p. 354.
1861. *Calycella syringa*, Hincks, Cat. Dev. Zooph., p. 23; Ann. N. H. VIII. p. 294.
1864. „ „ Allm., Ann. N. H. for. May.

Trofosoma: Hidroteke cilindrične, dolje okrugle, poklopac sastavljen od 8—9 segmenata. Stapka se zavija.

Gonosoma: Gonoteke jajolike, glatke, na kratkoj stapci od 1—2 prstena, a dolaze rasijane između hidroteka.

Dolazi u Vel. Britaniji i kod Islanda.

Jadransko more: Na *Sargassum* i na zoofitima u Rovinju (Pieper). I ja sam je našao na algama iz Rovinja.

Porodica: **Haleciidae.**

Trofosoma: Hidroteke u 2 reda, skoro sjedave, na člankovitom postranom nastavku stabljike. Rub hidroteke urešen vijencem točaka. Hidranti se mogu samo djelomice uvući u čašku.

Rod: Halecium, Oken.

Thoa, Lamouroux.

Trofosoma: Hidranti veliki, vretenasti. Hidroteke cjevaste ili zvončikaste.

Gonosoma: Gonoteke rasijane, raznospolne.

Halecium halecinum, (L.).

1767. *Sertularia halecina*, Linné, S. N. ed. XII., p. 1308.
1792. „ „ Olivi, Zool. adr., p. 288.
1816. „ „ Lamk., An. s. Vert. II., p. 146.
1816. *Thoa halecina*, Lamx., Cor. flex. p. 211.
1820. *Halecium halecinum*, Schweigger, Handb., p. 426.
1834. *Thoa halecina*, Blaino., Actinolog., p. 488, pl. LXXXIV f. 4., 4a.
1847. *Halecium halecinum*, Johnst., B. Z. p 58, pl. VIII.
1868. „ „ Heller, Zooph., p. 33.

Trofosoma: Stabljika uspravna, nepravilno granata; glavne grane peraste, (te se katkada i ove razgranjuju), člankovite, sa kratkim debelim međučlancima. Hidroteke izmjenične, cjevaste, sa cjelovitim i nešto iskrenutim rubom.

Gonosoma: Gonoteke u nizu na gornjoj strani grana; muške jajolike, na kratkoj stapci od 2 članka, a ženske duge, gore široke, prema dnu se sužuju, sa kratkim cjevastim ušćem (orificium) na strani odrezanoga gornjeg dijela.

Dolazi na školjkama, kamenju na obali Belgije, Grenlanda, Labradora, Masačusetsa.

Sredozemno more: Na raznim predmetima u moru (Pallas); Marsilja (M.), Toskana (R.).

Jadransko more: Mleci (Olivi); Hvar (Hr.), Rovinj (Graeffe). Na *Halecium halecinum* iz Rovinja našao sam pričvršćena briozoa *Pedicellina*.

Halecium labrosum, Alder.

1860. Ann. N. H. III, p. 354, pl. XII. f. 1—3.
1868. Hincks, B. H. Z., p. 225, pl. XLIV, f. 1.

Trofosoma: Nepravilno razgranjenje, stabljika sastavljena od više cijevi; veće grane sastavljene, dihotomski razgranjene, peraste; grančice izmjenične, člankovite, prstenaste. Hidroteke na dnu člankovite i prstenaste, a rub im je jako iskrenut.

Gonosoma: Gonoteke jajolike.

Dolazi u dubokom moru Britanije.

Jadransko more: Istočna obala (Pieper); u hrvatskom Primorju dolazi na *Cystosira* u Senju.

Halecium Beanii, Johnston.

1847. *Thoa Beanii*, Johnston, B. Z. p. 120, pl. VII, f. 1, 2.
1847. *Halecium Beanii*, Johnst., B. Z. p. 59, pl. IX, f. 1, 2.

Trofosoma: Hidroteke malene, cjevaste, prema otvoru nešto raširene.

Gonosoma: Gonoteke na dnu hidroteka; muške jajoliko produljene, a ženske cipelaste, sa kratkim cjevastim otvorom u sredini gornje polovice gonoteke.

Dolazi na školjkama, a vrlo često parasituje na drugim zoofitima europejskih mora.

Jadransko more: Na istočnoj obali jako česta (Pieper). U hrvatskom Primorju dolazi u Senju i Novom, pričvršćena na *Eudendrium racemosum.*

Halecium ophiodes, Pieper.

1884. Zool. Anzeiger, VII, p. 167.

Trofosoma: Stabljika duboko prstenasta, a korijen se više puta zavija. Veći dio donje partije stabljike bez grana, koje se istom više gore razvijaju i svojim položajem sa stabljikom tvore oštar kut. To razgranjivanje može ići dotle, da je hidroidpolip vidjeti kao stabalce sa kitnjastom krošnjom. Grane su same iz početka tanje, duboko prstenaste kao i stabljika, te se dokančaju raširenim dijelom bez prstena, koji je ovdje hidroteka. Stablo *(hydrophyton)* je boje tamno-smedje. Hidrant je vrlo velik, vretenast, ispod dna ticalâ jako urezan, te se dijeli tako u 2 jasna predjela: jedan je s ustima i ticalima — oralan, a drugi, donji — aboralan. Hidrant stanuje samo u gornjoj trećini neprstenastoga, glatkog dijela grane ili hidroteke.

Gonosoma: Gonoteke nepoznate.

Jadransko more: Rovinj, Piran, dalmatinska obala (P.); u Rovinju, Senju na *Cystosira*, u Crikvenici i Sv. Jurju, po jako velikom broju individua zastupan.

Halecium robustum, Pieper.

Halecium inornatum, *Richiardi.*

1884. Zool. Anzeiger, VII, p. 166.

Trofosoma: Stabljika čvrsta, prstenasta, bez boje; korijen razgranjen. Nad svakim se čvorom stabljike nalazi laki urez. Grana ne ima. Hidroteke dolaze u nizu jedna nad drugom, ali ne tako, kako kod ostalih *Halecium*-vrsta, da je jedna čaška u drugu utaknuta (geschachtelt), nego izlaze jedna iz druge (2—3) sa kratkom stapkom od jednog prstena. Rub hidroteke urešen vijencem točaka i nije iskrenut.

Gonosoma: Gonoteke nepoznate.

Sredozemno more: Toskana (R.).

Jadransko more: Istočna obala (P.); Rovinj, na *Antennularia antennina.*

Halecium, species?

Trofosoma: Sličan vrsti *Halecium tenellum*, Hincks.

Stabljika nepravilno razgranjena, hidroteke vrlo duge, uske, cjevaste, rub im je jako iskrenut i urešen vijencem točaka. Hidrotekâ ima 3—5, jedna izlazi iz druge, a svaka ima na svojem dnu 1—3 prstena.

Gonosoma: Gonoteka nisam našao.

Jadransko more: Ovu sam vrstu našao na *Eudendrium ramosum* iz Rovinja.

Porodica: **Sertulariidae.**

Trofosoma: Hidroteke sjedave, više manje u stabljiku i grane utaknute. Hidranti posve retraktilni sa čunjastim hipostomom.

Rod: Sertularella, Gray.

Sertularia, auct.
Cotulina, Agassiz.
Amphitrocha, Agassiz.

Trofosoma: Stabljika više manje granata, člankovita. Hidroteke u 2 reda, pravilno se izmjenjujuć, sa zupčastim otvorom i sastavljenim poklopcem.

Gonosoma: Gonoteke rasijane, poprječno prstenaste.

Sertularella polyzonias, (L.).

1758. *Sertularia polyzonias*, Linn., Syst. Nat. X. p. 813.
1758. „ *flexuosa*, Linn., S. N. X. p. 814, no. 34.

1766. *Sertularia ericoides,* Pall., Elenchus, p. 127.
1816. „ *polyzonias,* Lamx., Cor. flex. p. 190.
1816. „ „ Lamk., An. s. Vert. II. p. 142.
1835. „ *Ellisii,* M. Edwards, Hist. des Anim. s. V. de Lamk., ed. II. t. II. p. 142.
1836. „ *pinnata,* Templeton, Mag. N. H. IX. p. 468.
1843. *Sertularella polyzonias,* Gray, B. M. Radiata, p. 68.
1847. *Sertularia* „ Johnst., B. Z. p. 61, pl. X. f. 1 i 3.
1847. „ „ Dalyell, Rem. An. I. I. p. 134, pl. XXII.
1847. „ *Ellisii,* Johnst., B. Z., p. 123.
1860. *Cotulina polyzonias,* Agassiz, N. H. U. S. IV. p. 356.
1868. *Sertularia Ellisii,* Heller, Zooph. p. 33.

Trofosoma: Stabljika tanka, isprevijana, nepravilno se razgranjuje, grane izmjenične, u nejednakim razmacima i koso članjene. Hidroteke razmaknute, žarastog oblika, na dnu prostrane, gore slobodno divergiraju, sa širokim otvorom izvučenim u 4 zuba.

Gonosoma: Gonoteke se razvijaju na kratkoj stapci kod dna hidrotekâ, te su velike, jajolike, popriječno naborane, a cjevasti otvor im je također izvučen u 4 zuba.

Dolazi na školjkama i algama u Atlantskom oceanu: Masačusets, Grenlandija, Islandija, Nova Fundlandija, Madejra, Južna Afrika.

Sredozemno more: Marsilja (M.), Genova (De Not.), Spezia (Bertoloni), Toskana (R.), Napulj (Cav., D. Ch., Sars), Mesina (Sars).

Jadransko more: Zapadna i istočna obala (P.); Mleci (Ol.); Kvarner, Lošinj mali (Grube); Hvar (Hr.), Lastovo (Hr.); Trst, na kamenju (Graeffe); Rovinj, na *Antennularia antennina.*

U hrvatskom Primorju dolazi na kamenju i algama, te je na nekim mjestima zastupana u jako velikom broju: Crikvenica, Novi, Senj, Sv. Juraj.

Sertularella fusiformis, Hincks.

1861. *Sertularia fusiformis,* Hincks, Cat. Devon and Corn. Z. p. 11, pl. VI, f. 7, 8, Annals N. H. VIII. p. 253, pl. VI. f. 7, 8.
1868. *Sertularella* „ Hincks, B. H. Z. p. 243, pl. XLVII, f. 4.

Trofosoma: Stabljika isprevijana, najčešće nerazgranjena, na dnu i pod svakom čaškom prstenasta. Hidroteke duge, bocaste, položaj im je takav, te se čini, da jedna ide sa strane iz druge, ali

uvijek izmjenično, sljednja u protivnom smjeru, nego li je ona pred njom. Rub je hidroteke proviđen sa 4 zuba, a poklopac sastavljen od 4 komada. Međučvor (internodium) tvori sa čaškom vretenast oblik.

Gonosoma: Gonoteke duge, jajolike, sa popriječnim rebrima, kratkim vratom i zupčastim otvorom.

Dolazi na obali Vel. Britanije i Hebrida.

Sredozemno more: Toskana (R.).

Jadransko more: Rovinj, Piran i dalmatinska obala (P.). Kod Trsta na školjkama i algama (Graeffe). U hrvatskom je Primorju jako česta na kamenju i algama: Novi, Senj, na *Cystosira abrotanifolia, Codium tomentosum* i na drugim algama, pak na kamenju; Sv. Juraj, Karlobag.

Rod: Sertularia, L.

Dynamena, Lamouroux.

Amphisbetia, Agassiz.

Trofosoma: Stabljika više manje granata, člankovita.

Hidroteke u 2 reda, napramne ili izmjenične, bez izvanjeg poklopca.

Gonosoma: Gonoteke rasijane, sa jednostavnim otvorom (orificium), bez nutrnjeg marsupija.

Sertularia secunda, (Menegh.).

Dynamena secunda, Menegh., in litt.

1845. „ *reptans*, Costa, F. di N. p. 23, t. VIII, f. 2.

1868. „ *secunda*, Heller, Z. p. 36, t. I. f. 7, 8.

1885. *Sertularia secunda*, V. Carus, Prodromus I. p. 14.

Trofosoma: Stabljika končasta, jednovita ili se dihotomski cijepa, sa dugim člancima. Hidroteke u 2 reda, napramne, cjevaste, sa koso odrezanim otvorom, komu je rub cjelovit.

Gonosoma: Gonoteke jajolike, sa cjelovitim rubom centralnog otvora, koji je pokriven plosnato konveksnim poklopcem.

Dolazi u Sredozemnom moru:? Napulj (Costa).

Jadransko more: Piran (P. Titius); Primošten (Capočesto) (Vidović); Na algama u Rovinju, Crikvenici, Senju, Karlobagu.

Porodica: **Plumulariidae.**

Trofosoma: Hidroteke sjedave i samo na jednoj strani. Nematofori dolaze: dolje na dnu hidroteke po jedna nematoteka, koja opći sa hidrotekom i gore po 2 postrane nematokalice, koje ne opće sa hidrotekom. Hidranti sa vijencem končastih ticala.

Rod: Aglaophenia, Lamouroux.

Plumularia, Lamarck.
Aglaophenia, M' Crady.

Trofosoma: Stabljika jednovita ili razgranjena. Hidroteke čašaste ili cjevaste sa jednom prednjom nematotekom i po 2 postrane nematokalice.

Gonosoma: Gonoteke sastavljaju korbule.

Aglaophenia pluma, (L.).

1767. *Sertularia pluma,* Linn., S. N. XII. p. 1309.
1785. „ „ Cavolini, Polip. mar. p. 210, t. VIII, f. 5—7.
1792. „ „ Olivi, Zool. adr. p. 289.
1815. *Pennaria pluma,* Oken, Lehrb. Natur. p. 94.
1816. *Aglaophenia pluma,* Lamx., Cor. flex., p. 170.
1816. *Plumularia cristata,* Lamk., A. s. V., t. II, p. 125.
1834. *Sertularia pluma,* Lister, Phil. Trans. p. 369, pl. VIII, f. 2.
1845. *Anisocalyx* „ Costa, F. di N. p. 1, t. 1.
1847. *Plumularia cristata,* Johnst., B. Z. p. 92, pl. XXIII, f. 1—3, i pl. XXIV. f. 1.
1861. „ „ Grube, A. n. T. p. 131.
1868. „ „ Heller, Z., p. 39, t. II, f. 1.

Trofosoma: Grane izmjenične, te bleđe boje nego stabljika. Hidroteke čaškaste sa širokim otvorom, a rub otvora iskrenut i proviđen jednakim zubićima. Postrane nematokalice malene, a prednja nematoteka debela i na kraju slobodna.

Gonosoma: Gonoteke jajolike; korbule se razvijaju u proljeću i ljetu (svibanj do kolovoza).

Raširena je po cijelom svijetu: Atlantski ocean, južna Afrika, Australija, Engleska, Belgija.

Sredozemno more: Marsilja (M.), Genova (De Not.), Spezia (Bertoloni), Toskana (R.), Napulj, Mesina (Hincks, Sars), Napulj (D. Ch.).

Jadransko more: Na *Cystosira* (P., Ol.); Trst, na *Cystosira;* Rovinj.

U hrvatskom Primorju: Senj, na kamenju i na *Cystosira*-vrstama u velikom broju; Sv. Juraj, Karlobag.

Aglaophenia octodonta, (Menegh.).

1845. *Plumularia octodonta*, Meneghini, Mem. dell'Istit. Veneto.
1868. „ „ Heller, Z. p. 40, t. II. f. 3.

Trofosoma: Slična je vrsti *Agl. pluma*. Ali hidroteke su ovdje mnogo kraće i šire, zubići ruba skoro jednaki. Nematoteka gore odrezana i seže skoro do ruba otvora hidroteke.

Gonosoma: Razvija korbule u svibnju i lipnju.

Jadransko more: Na kamenju i pećinama u malim dubinama kod Pirana (P. Tit.); Trst, u luci na kamenju (Graeffe).

U hrvatskom je Primorju dosta česta na kamenju i algama *(Cystosira)*: Novi, Šenj, Sv. Juraj, Karlobag.

Aglaophenia elongata, (Menegh.).

1845. *Plumularia elongata*, Meneghini, Sertulariae in Memor. dell'Istit. Veneto.
1868. „ „ Heller, Z. p. 39, t. II. f. 2.

Trofosoma: Slična takodjer vrsti *Agl. pluma*, samo su članci nešto dulji, nego kod prvih vrsta. Rub hidroteke izvučen u jednake zubiće, koji su ovdje uži. Nematoteka ne seže ni do polovice čaške.

Sredozemno more: Toskana (R.).

Jadransko more: Piran (P. Tit., Hr.), Rovinj, na *Sargassum* (Graeffe).

U hrvatskom ju je Primorju naći na *Cystosira*-vrstama: Senj, Sv. Juraj, Karlobag.

Aglaophenia Kirchenpaueri, (Heller).

Plumularia algirensis, Kirchenpauer, in lit.
1868. „ *Kirchenpaueri*, Heller, Zooph., p. 40, t. II. f. 4.

Trofosoma: Čaške kratke, rub im je proviđen sa svake strane sa 4 zubića, od kojih je prvi na svakoj strani veći i dulji od ostalih, i od njih nešto odmaknut; nematoteka izlazi iz sredine čaške, produljena, ali ne nadvisuje čaške.

Gonosoma: Kao kod ostalih spomenutih *Aglaophenia*-vrsta.

Sredozemno more: Toskana (R.).

Jadransko more: Piran (P. Tit.); Kvarner (St.); Hvar (Heller); Senj.

„Ovo je valjda, veli Heller, najčešća vrsta u Jadranskom moru iza *Agl. pluma*, te je ovoj vrlo slična tako, da ju je s ovom lako zamijeniti".

Rod: Antennularia, Lamarck.

Nemertesia, Lamouroux.

Trofosoma: Stabljika jednovita ili razgranjena, člankovita. Grančice u prešljene poredane, a ne peraste. Hidroteke čaškaste. Nematofore dvoklijetkaste, na stabljici ponamještene.

Gonosoma: Gonoteke u pazuhici i to samo na jednoj strani.

Antennularia antennina, (L.).

1767. *Sertularia antennina*, Linn., S. N. XII. p. 1310.
1792. „ „ Olivi, Zool. adr., p. 289.
1815. *Nigellastrum antenninum*, Oken, Lehrb. Nat. p. 93.
1816. *Nemertesia antennina*, Lamx., Cor. flex. p. 163.
1816. *Antennularia indivisa*, Lamk., An. s. Vert. II. p. 156.
1847. „ *antennina*, Johnst., B. Z. II. p. 86, pl. XIX, f. 1, 3.
1868. „ „ Heller, Z., p. 38.

Trofosoma: Stabljika redovito jednovita, ređe slabo razgranjena, produljena, uspravna, končasta, na spužvastom korijenu. Grančice kratke, člankovite, prešljenaste, u svakom ih prešljenu dolazi 6—10. Članci na grančicama izmjenice kraći i dulji: dulji nose malu hidroteku i po 3 nematofore, a kraći samo jednu nematoforu. Nematofore su konične, čaškaste, po 2 nad svakom hidrotekom, a po jedna pod hidrotekom, zatim jedna na kraćem srednjem članku i 2 na dnu grančice.

Gonosoma: Po jedna gonoteka u pazuhici, jajolika, sa kratkom stapkom i s otvorom okrenutim prema stabljici.

Dolazi u Atlantskom oceanu i Sjevernom moru.

Sredozemno more: Napulj (D. Ch.).

Jadransko more: (Olivi); Rovinj; Zadar (Dobiaš).

Antennularia ramosa, Lamarck.

1767. *Sertularia antennina*, β, Linn., S. N. XII. p. 1310.
1816. *Antennularia ramosa* Lamk., An. s. Vert., II. p. 156.
1816. *Nemertesia* „ Lamx., Cor. flex. p. 164.
1841. *Antennularia* „ Hassall, Ann. et Mag. N. H. VI, p. 168, pl. V. f. 1, 2.
1841. „ *arborescens*, Hassall, Ann. N. N. XI. p. 111.
1847. „ *ramosa*, Johnst., B. Z., p. 88, pl. XX.

Trofosoma: Stabljika debela, nepravilno razgranjena, grančice duge, po 4 u svakom prešljenu, ali nešto nepravilno ponamještene,

člankovite, međučvorovi (internodium) jednake duljine. Na svakom članku po jedna hidroteka i 4 nematoteke: po jedna nematoteka nad hidrotekom, po jedna pod njom i po 2 sa strane hidroteke.

Gonosoma: Gonoteke kruškolike.

Dolazi u Atlantskom oceanu, na obali Britanije i u južnoj Africi, te u Sredozemnom moru.

Jadransko more: (Kirchenpauer), Senj.

Rod: Plumularia, Lamarck.

Aglaophenia, Lamouroux.
Plumularia, M'Crady.
Halicornaria, Busk, MS.

Trofosoma: Stabljika jednovita ili razgranjena. Grančice perasto namještene, člankovite. Hidroteke i nematofore rastavljene. Hidroteke čašaste; nematoteke po stabljici i grančicama.

Gonosoma: Gonoteke rasijane, raznospolne.

Plumularia setacea, (Ellis).

1755. *Corallina setacea,* Ellis, Corall., pl. XXXVIII. f. 4.
1766. *Sertularia* „ Pall., Elench. p. 148.
1767. „ *pinnata,* β, Linn., S. N. XII. p. 1312.
1815. *Pennaria setacea*, Oken, Lehrb. Nat. p. 94.
1816. *Aglaophenia* „ Lamx., Cor. flex. p. 272.
1816. *Plumularia* „ Lamk., An. s. V. II. p. 165.
1847. „ „ Johnst., B. Z. p. 97, pl. XXII, f. 3 - 5.
1860. „ „ Agassiz, N. H. U. S. p. 358.
1872. *Anisocalyx setaceus*, Kirchenpauer, Abhand. Natw. Verein, Hamburg, V. Bd.

Trofosoma: Stabljika nježna, grančice izmjenične, članci dulji i kraći. Hidroteke dolaze na duljim člancima, te su malene sa cjelovitim rubom. Nematofore duge: 2 gore na hidroteci i jedna pod njom, a po jedna na kraćem članku, koji ne nosi čaške.

Gonosoma: Gonoteke u pazuhici grančica: ženske bocaste, glatke, a muške manje, uže, sa vrlo malim otvorom. Gonangija se razvijaju u ljetu i jeseni.

U europskim je morima dosta česta. U indijskom oceanu: otok Mauritius.

Sredozemno more: Spezia (? Bertoloni), Toskana (R.), Mesina (Sars), Napulj (D. Ch., Costa).

Jadransko more: Istočna obala (P.); kod Trsta je rijetka, ali je češća u Rovinju, na *Antennularia* (Graeffe). Ja sam je također našao na *Antennularia antennina* iz Rovinja.

U hrvatskom je Primorju dosta rijetka: Senj, na *Cystosira abrotanifolia*.

Plumularia secundaria, (L.).

Sertularia secundaria, Linné, Gmelin, p. 3854, n. 61.
1785. „ „ ?, Cavolini, P. m. III. p. 226, t. VIII.
1816. *Aglaophenia* „ Lamx., p. 172.
1843. „ *Catharina*, Gray, Cat. B. M. Rad., p. 81.
1845. *Anisocalyx secundarius*, Costa, F. di N. p. 12, t. II, f. 2.
1845. „ „ Menegh., Sert. p. 195, t. XIV.
1847. *Plumularia Catharina*, Johnst., B. Z. p. 97, f. 1.
1860. „ „ Agassiz, N. H. U. S. IV. p. 358.
1868. *Anisocalyx secundarius*, Heller, Z., p. 42.
1868. *Plumularia Catharina*, Hincks, B. H. Z. p. 299, pl. LXVI, f. 2.

Trofosoma: Grančice napramne; hidroteke visoke, sa cjelovitim rubom, dolaze na kraćim člancima. Nematofore na dnu protanjene: po jedna na kratkoj stapci na svakoj strani hidroteke, jedna pod hidrotekom, a jedna na članku povrh hidroteke.

Gonosoma: Gonoteke razvite na dnu hidroteke: muške jajoliko produljene a ženske kruškolike, sa poklopcem, na dvočlanoj stapci i na dnu sa 2 nematofore.

Dolazi na školjkama i koralima u dubokom moru Vel. Britanije i Irske.

Sredozemno more: Napulj (Cav., D. Ch., Costa).

Jadransko more: Primošten (H.); Rovinj.

Raširena je ova vrsta po čitavom hrvatskom Primorju: na algama u Kraljevici, Novom, Senju, Sv. Jurju (u velikom broju na *Sargassum-* i *Cystosira*-vrstama) i Karlobagu.

? Plumularia echinulata, Lamarck.

1816. *Plumularia echinulata*, Lamk., A. s. V. p. 162.
1834. *Sertularia setacea*, Lister, Phil. Trans., p. 371, pl. VIII. f. 4.
1847. *Plumularia echinulata*, Johnst., B. Z. p. 464, 465, f. 80.

Trofosoma: Stabljika člankovita, kraći međučvorovi dolje protanjeni; grančice peraste, izmjenične. Hidroteke malene, zdjeličaste.

jedna od druge odaljene. Nematofore vrlo malene, ne dolaze na kraćim člancima: po jedna povrh hidroteke, jedna pod njom, a jedna u pazuhici grančice.

Gonosoma: Gonoteke jajolike, sa uzdužnim trnovitim rebrima, razvijaju se na stolonama i stabljici.

Dolazi u moru Vel. Britanije.

Sredozemno more: Genova (Weismann).

Jadransko more: Sv. Juraj kraj Senja, vrlo rijetka.

Plumularia obliqua, (Saunders).

Laomedea obliqua, Saunders, in litt.

1834. *Campanularia*, Lister, Phil. Trans., p. 372, pl. VIII. f. 5.

1847. *Laomedea obliqua*, Johnst., B. Z. p. 106, pl. XXVIII. f. 1.

1868. *Plumularia obliqua*, Hincks, B. H. Z., p. 304, pl. LXVII, f. 1.

Trofosoma: Stabljika malena, jednovita, tanka, isprevijana, članjena; grančice izmjenične, kratke, od 2 članka, nose samo po jednu hidroteku. Hidroteke zvončikaste sa krivudastim rubom. Nematofore male, po 2 skoro kod ruba hidroteke, a po jedna na dnu hidroteke, pa u pazuhici i na svakom međučvoru.

Gonosoma: Gonoteke velike, jajolike, gore odrezane.

Dolazi u Atlantskom oceanu, zatim kod Australije (Van Diemenova zemlja).

Jadransko more: (Meneghini); Hvar, Rovinj, Piran. Pieper pripovijeda, da nije nikada našao briozoa *Cothurnicella Cordieri* (W. Thomson), a da ga ne bi pratila *Plumularia obliqua*. Dokaz je to, veli on, da obe životinje ljube jednu te istu algu.

U hrvatskom Primorju: Sv. Juraj, Senj (ovdje redja).

Plumularia halecioides, Alder.

1863. *Plumularia halecioides*, Alder, Ann. N. H. III. p. 353, pl. 12.

1868. *Anisocalyx pinnatifrons*, Heller, Z., p. 43, t. II, f. 7, 8.

1868. *Plumularia halecioides*, Hincks, B. H. Z., p. 306, pl. LXVII, f. 2.

Trofosoma: Stabljika nepravilno razgranjena, grančice alterniraju. Hidroteke vrlo odaljene Nematofore jako malene, sa nešto kosim otvorom; jedna povrh, a jedna ispod svake hidroteke, a jedna opet na stabljici povrh prikopčaja grančice.

Gonosoma: Gonoteke velike, jajolike, poprijeko rebraste sa kratkom stapkom; razvijaju se na stabljici.

Dolazi kod Vel. Britanije.

Jadransko more: Mleci (Sert. pinnata? p. 290, Olivi?); Hvar (H.); u tršćanskoj luci vrlo česta na drvenim stupovima, školjkama (Graeffe); Rovinj, na *Zostera*.

U hrvatskom je Primorju dosta raširena: Kraljevica; Novi, na kamenju; Senj, na koralu *Cladocora cespitosa* i na algama; Sv. Juraj; Karlobag.

Plumularia pinnata, (L.).

1767. *Sertularia pinnata,* Linné, S. N. XII, p. 1312.
1786. „ „ Ellis et Sol., Zooph., p. 46.
1816. *Aglaophenia pinnata* Lamx., Cor. flex. p. 172.
1816. *Plumularia* „ Lamk., An. s. Vert. II. p. 164.
1847. „ „ Johnst., B. Z. p. 95, pl. XXI, f. 4, 5.
1860. „ „ Agassiz, N. H. U. S. IV. p. 358.
1868. „ „ Hincks, B. H. Z., p. 295, pl. LXV., f. 1.

Trofosoma: Stabljika člankovita, grančice izmjenične. Hidroteke prostrane sa cjelovitim rubom. Nematofore malene, sjedave, po jedna pod hidrotekom.

Gonosoma: Gonoteke u dvostrukom nizu na stablu, te su jajolike ili kruškolike, na kratkoj stapci, a na vrhu su trnovite.

Dolazi na školjkama, kamenju i algama u Njemačkom moru.

Sredozemno more: Genova? (De Not.); Napulj (D. Ch.?).

Jadransko more: Piran, Rovinj, Hvar, Primošten, Vis (Pieper); Rovinj (Graeffe).

U hrvatskom Primorju dolazi u Kraljevici i Senju.

Prijegled opisanih vrsta.

Gymnoblastea, Allman:

Corydendrium parasiticum, (Cavolini).
Coryne pusilla, Gärtner.
Cladocoryne floccosa, Rotch.
Bougainvillia muscus, Allm.
„ *fruticosa*, Allm.
„ *ramosa*, (v. Ben.).
Perigonimus repens, (Wright).
Eudendrium ramosum, (L.).
„ *racemosum*, (Cav.).
„ *rameum*, (Pall.).
Podocoryne carnea, Sars.
Tubularia larynx, Ellis et Solander.
„ *mesembryanthemum*, Allm.

Calyptoblastea, Allman:

Campanularia volubilis, (L.).
„ *volubiliformis*, Sars.
„ *caliculata*, Hincks.
„ *gigantea*, Hincks.
„ *flexuosa*, Hincks.
„ *angulata*, Hincks.
„ *raridentata*, Alder.
„ *neglecta*. (Alder).
Clytia Johnstoni, (Alder).
Obelia geniculata, (L.).
„ *dichotoma*, (L.).
„ *gelatinosa*, (Pallas).
Gonothyraea Lovéni, Allm.
Lafoëa pocillum, Hincks.
„ *parasitica*, Ciamician.
„ *dumosa*, (Fleming).

Calycella syringa, (L.).
Halecium halecinum, (L.).
„ *labrosum*, Alder.
„ *Beanii*, Johnston.
„ *ophiodes*, Pieper.
„ *robustum*, Pieper.
„ *spec.?*
Sertularella polyzonias, (L.).
„ *fusiformis*, Hincks.
Sertularia secunda, (Menegh.).
Aglaophenia pluma, (L.).
„ *octodonta*, (Menegh.).
„ *elongata*, (Menegh.).
„ *Kirchenpaueri*, (Heller).
Antennularia antennina, (L.).
„ *ramosa*, (Lamarck).
Plumularia setacea, (Ell.).
„ *secundaria*, (L.).
„ *echinulata*, Lamarck.
„ *obliqua*, (Saunders).
„ *halecioides*, Alder.
„ *pinnata*, (L.).

Dokaz jednog Weierstrassova stavka.

Čitao u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 27. studenoga 1897.

ČLAN DOPISNIK PROF. DR. V. VARIČAK.

U raspravi „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen“[1] pokazao je Weierstrass, kako je uvijek moći odrediti cijelu transcendentnu funkciju, koja se poništava za beskonačno mnogo, unaprijed danih, realnih vrijednosti a_0, a_1, a_2 . . ., ako te ispunjuju uvijet $\lim a_n = \infty$ za $n = \infty$. On je naime predstavio taku funkciju produktom

$$f(x) = \prod_{0}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{P_n\left(\frac{x}{a_n}\right)} \right\} \tag{1}$$

gdje je

$$P_n\left(\frac{x}{a_n}\right) = \frac{x}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^2 + \ldots . + \frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{n+1} \tag{2}$$

Produkt (1) zadovoljava stavljenom uvijetu, jer se doista poništava samo za $x = a_n$, a oni eksponencijalni faktori uvijek su konačni. Treba jedino još utvrditi, da je taj produkt konvergentan za svaku vrijednost argumenta. To se može lako učiniti pokazavši, da se za svako x može naći takav broj n, uz koji se sve što slijedi iza n-toga faktora približuje jedinici, ili što je isto, da se logaritam ostatka

$$R_n = \prod_{n}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{P_n\left(\frac{x}{a_n}\right)} \right\}$$

poništava, kad n beskonačno naraste.

[1] Abhandlungen aus der Functionenlehre pag. 16.

Znajući da je

$$\log\left(1-\frac{x}{a_n}\right)=-\frac{x}{a_n}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^2-\ldots.$$
$$-\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{n+1}-\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{n+2}-\ldots.$$

te gledajući na (2) dobivamo za logaritam prvog člana ostatkova

$$\log\left(1-\frac{x}{a_n}\right)+P_n\left(\frac{x}{a_n}\right)=-\frac{1}{n+2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{n+2}-\frac{1}{n+3}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{n+3}-\ldots$$

Lako se može naći iznad koje se vrijednosti ne diže ovaj izraz, jer je njegova lijeva strana manja od

$$-\frac{1}{n+2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{n+2}\left\{1+\frac{x}{a_n}+\left(\frac{x}{a_n}\right)^2+\ldots.\right\}$$

Kako brojevi a_n sa rastućim n sveudilj rastu, pak je $\lim a_n=\infty$, očito je, da se za svako x može naći takav n da bude $\frac{x}{a_n}<1$, a time

$$\log\left(1-\frac{x}{a_n}\right)+P_n\left(\frac{x}{a_n}\right)<-\frac{1}{n+2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{n+2}\left(1-\frac{x}{a_n}\right)^{-1}$$

Slične bi izraze dobili i za logaritme ostalih faktora u ostatku R_n, te je tako

$$\log R_n<-\left\{\frac{1}{n+2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{n+2}\left(1-\frac{x}{a_n}\right)^{-1}+\frac{1}{n+3}\left(\frac{x}{a_{n+1}}\right)^{n+3}\right.$$
$$\left.\left(1-\frac{x}{a_{n+1}}\right)^{-1}+\ldots+\frac{1}{n+p+2}\left(\frac{x}{a_{n+p}}\right)^{n+p+2}\left(1-\frac{x}{a_{n+p}}\right)^{-1}+\ldots.\right\}$$

Poradi $a_{n+p}>a_n$ je $\left(1-\frac{x}{a_{n+p}}\right)^{-1}<\left(1-\frac{x}{a_n}\right)^{-1}$

a tim prije

$$\frac{1}{n+p+2}\left(\frac{x}{a_{n+p}}\right)^{n+p+2}\left(1-\frac{x}{a_{n+p}}\right)^{-1}<\frac{1}{n+2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{n+p+2}\left(1-\frac{x}{a_n}\right)^{-1}.$$

S toga je

$$\log R_n < -\frac{1}{n+2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{n+2}\left(1-\frac{x}{a_n}\right)^{-1}\left\{1+\frac{x}{a_n}+\left(\frac{x}{a_n}\right)^2+\ldots\right\}$$

i konačno

$$\log R_n < -\frac{1}{n+2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{n+2}\left(1-\frac{x}{a_n}\right)^2.$$

Granica kojoj teži ovaj izraz za $n = \infty$ je ništica, jer sa n raste i a_n beskonačno, te se s toga $\frac{x}{a_n}$ i $\log R_n$ poništava za svaku vrijednost argumenta x. Tako je utvrđena uniformna konvergencija beskonačnoga produkta (1) u cijeloj ravnini.[1]

Zna se da $f(x)$ nije jedina funkcija, kojoj su a_0, a_1, a_2 ... tačke nulâ; to je samo najednostavnija takva transcendenta, jer uvijet, koji je u početku istaknut ispunjuje i svaka funkcija oblika

$$F(x) = f(x) \cdot e^{\varphi(x)}$$

gdje je $f(x)$ produkt (1), a $\varphi(x)$ neka povoljna cijela transcendentna funkcija.

[1] Sravni *M. C. Jordan:* Cours d'analyse II. 317.

Vijor kod Čazme.

Čitao u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 11. siječnja 1898.

ČLAN DOPISNIK PROF. DR. ANDRIJA MOHOROVIČIĆ.

I.

Od 17. kolovoza o. g. u podne (750·6 mm) padao je u Zagrebu tlak zraka sve do 20. kolovoza u 2 s. 57 min. po podne (743·1 mm), a onda je rasao naglo, tako da je 21. u 11 s. prije podne iznašao 749·3 mm. Sličnu promjenu tlaka zraka pokazuju sve postaje srednje i južne Evrope.

Ta promjena tlaka zraka je posljedica rasporedbi tlaka zraka po Evropi i promjeni položaja barometrijskih maksima i minima onih dana.

Dne 18. kolovoza bio je visok tlak u južnoj Rusiji i na Iberskom poluotoku, a niski se je tlak protezao od sjevero-zapadne Norveške do M Azije preko Jadranskog mora, sa jakim minimom na sjevero-zapadu Norveške, slabijim minimom u M. Aziji i neznatnim minimom na Jadranskom moru.

Dne 19. kolovoza ostala je rasporedba tlaka zraka slična onoj od 18. kolovoza. Visoki tlak u južnoj Rusiji ostao je nepromijenjen, a onaj na Iberskom poluotoku se je ponešto pojačao. Barometrijski minimum na sjevero-zapadu Norveške pomaknuo se je istočno, a tlak je zraka ostao u sjevero-zapadnoj Evropi nepromijenjen. Istotako je ostao nepromijenjen tlak na skrajnom jugo-istoku Evrope. Depresija nad Jadranskim morem postala je dublja, te je tlak zraka po čitavoj južnoj Evropi pao. Minimum se je rasprostirao po čitavoj dolini Pada, po sjevernom dijelu Jadranskoga mora i po zapadnom dijelu Hrvatske.

Od 19. na 20. kolovoza promijenila se je slika rasporedbe tlaka zraka znatno. Na mjesto sjevero-zapadne depresije, koja se je pomakla dalje na istok, pridošla je nova iz oceana, koja je ostala

čitav dan 19. na zapadu Škotske. Maloazijski minimum pojačao se je neznatno a da nije promijenio svoga položaja. Južno-ruskog maksima je nestalo, a iberski maksimum se je znatno pojačao i prodro kroz Francesku u srednju Evropu. Minimum nad sjevernim dijelom Jadranskoga mora pojačao se je znatno. Tlak zraka je pao svuda na obalama sjevernog dijela Jadranskoga mora, a centrum depresije bio je u 7 s. u jutro negdje nad Istrom, Kranjskom i Kvarnerskim zaljevom.

Dne 20. prodro je iberski maksimum dalje i ispunio jadranski minimum, tako da ga dne 21. ne opažamo više na karti.

II.

Sjevero-jadranski minimum ostao je dakle tri dana bez znatne promjene na istom mjestu, a dne 20. poslije podne nestao je na istom mjestu gdje je i nastao. Po barogramu bio je u Bakru minimum tlaka oko 6 pm, a u Zagrebu u 3 pm.

Posljednju fazu minima pratila su jaka nevremena sa grmljavinom, mjestimice i sa tučom.

Na Rijeci je bila slaba grmljavina sa malo kiše u 1 s. po podne. U Bakru je zagrmilo jednom u 3 pm. U Lici je bilo lokalno nevrijeme u 4 s. po podne gdje i gdje sa par kapi kiše Na liniji Vrbovsko, Ogulin, Plaški počelo je grmiti u 3 s. 45 m. po podne. Ovo je nevrijeme nastalo u gorskom kotaru nešto poslije 3 s. po podne. Motritelj u Modrušu čuo je grmiti već u 2 s. 20 m. po podne, a u Crkvenici je bilo lijepo vrijeme čitavo popodne. Izobronta Vrbovsko, Plaški išla je putem sjevero-istoka, te je bila u u 4 s. 45 m. po podne na liniji Samobor, Jamnica; u 5·0 pm na liniji Zlatar, Čazma; a u 5 s. 45 m. na liniji Ludbrijeg, Bjelovar, Veliki Grdjevac.

Osim ovog nevremena, kojemu se put može prilično točno odrediti, bilo je još različitih drugih tečajem popodneva, kojim je teško odrediti put.

Najvažnije je za nas ono nevrijeme, koje se je pojavilo izobrontom Zagreb, Jamnica u 1 s. 25 m. po podne. Ovo je nevrijeme išlo smjerom od zapada prema istoku, te je bilo u 1 s. 45 m. na liniji Čazma, Križevci, Ludbrijeg.

Od 1 sat po podne pa sve do iza 9 sati grmilo je po čitavoj Hrvatskoj i jednom dijelu Slavonije neprestano, tako da je bilo veoma teško razlučiti pojedina nevremena jedno od drugoga. Poradi

toga je i veoma teško opredijeliti put pojedinih nevremena. Veoma je vjerojatno, da su po dva nevremena došla na gdjekoje mjesto istodobno sa dvije strane, jer više motritelja javlja, da su oblaci dolazili sa sjevera i juga.

U županiji ličko-krbavskoj pala je gdje i gdje tek po koja kap kiše, u županiji modruško-riječkoj, požeškoj i virovitičkoj nešto više, a najviše u županijama zagrebačkoj, bjelovarsko-križevačkoj i varaždinskoj. Tuče je bilo malo pomiješane s kišom oko 3 s. 50 m. po podne na liniji Hum na Sutli, Zlatar, Dugoselo, Križ, Kutina, Lipovljani, Pakrac. Osim toga nešto malo oko Lekenika, Velikoga Grdjevca, Kutjeva i Osijeka. Osobito je nastradao kotar čazmanski, ne toliko od tuče, koliko od oluje. Tuča je padala u općinama Kloštar Ivanić, Bunjani, Križ, Šumećani, Palančani sve do Čazme. Najjača je bila izmedju Kloštra Ivanića i Šumećana, počim je oluja bjesnila od Bunjana preko Palančana do Čazme.

Gosp. izvjestitelj umir. kapetan Cvijanović iz Sumečana piše medju ostalim ovo: „Najveća oluja bila je u Sumečanima oko 3 s. po podne. Došla je od zapada i jurila jugo-istočnim pravcem (dakle od WNW prema SSE), držeći se u glavnom jaraka i nizina. Grmilo je prije i poslije oluje, dočim za najjačeg vihra grmilo nije ili se barem toga ne sjećam. Tuča je padala iza najjačeg vihra uz jaki WNW. Dolazak oblaka nije u početku ni svojim oblikom (od zapada crveno-sivi, od sjevera crno-sivi i rastrgani) ni svojom masom dao nagadjati na veću nezgodu. Za najjače oluje bili su oblaci tik do zemlje".

Gosp. izvjestitelj Ivan Piškorić iz Čazme javlja slijedeće: „Dne 20. kolovoza mogao sam razabrati tri nevremena: 1). Počelo grmiti u 1 s 45 m po podne, najjače grmilo u 4 s. 26 m. po podne; jaka kiša od 3 s. 36 m. po podne do 4 s. 25 m. po podne, sa slabom tučom od 3 s. 53 m. do 3 s. 55 m. po podne. Za čitavog nevremena vjetar od SW. Grom udario u Čazmi i u blizini više puta bez znatne štete. Nedaleko Čazme jaki ciklon i velika šteta u šumi. 2). Počelo grmiti u 5 s. 7 m. po podne, najjače grmilo u 5 s. 50 m., sa kišom od 5 s. 30 m. do 5 s. 55. m. po podne. Nevrijeme došlo od NE. 3). Nevrijeme došlo od SW prema SE; počelo grmiti u 6 s. 45 m. po podne, najjače grmilo u 7 s. 15 m. po podne, sa malo kiše od 7 s. 5 m. do 7 s. 10 m. po podne".

Da se pobliže istraži šteta, umolio je dopisnik kotarskog mjernika u Čazmi g. I. Petrovića i šumara imovne općine križevačke g. A. Marka, da svaki od njih pregleda oštećeni terrain. Gospoda

su se odazvala dragovoljno tom pozivu i svaki od njih je napravio po jednu skicu oštećenog terraina, a g. je dopisnik priposlao te skice ovome observatoriju.

Ujedno nadovezuje gosp. dopisnik, da je sličan ciklon dne 23. srpnja 1870. porušio u 200 godina staroj šumi kod mjesta Berek blizu Ivanske (20 km daleko od Čazme) oko 120 komada hrastova, a osim toga množinu jablana, šljiva i jabuka.

Videći da je stvar sa znanstvenoga gledišta od važnosti, izvijestio sam o tom visoku kr. zem. vladu, odjel za bogoštovje i nastavu, a ona me je odmah poslala, da na licu mjesta stvar proučim i o rezultatu svog istraživanja visoku vladu izvijestim.

Pošto sam stvar istražio, u šumi u društvu s kotarskim šumarom g. Kolibašem, točno odredio položaj većine porušenih stabala (sl. 1.) i ispitao očevidce, to reasumiram svoje istraživanje slijedećim retcima:

Nevrijeme je došlo od W. U Zagrebu, na Sljemenu i u Jamnici je počelo grmiti u 1 s. 26 m. po podne, a najjače je grmilo u Zagrebu u 1 s. 45 m. po podne, a u Jamnici u 2 s 2 m. po podne, dočim je počelo grmiti u Čazmi u 1 s. 42 m., a najjače grmilo u 4 s. 26 m. po podne. Računajuć udaljenost od Zagreba do Čazme sa okruglih 50 km, to bi bila provalila izobronta prve grmljavine taj put za 20 minuta, a izobronta najjače grmljavine za 2 s. 30 m. U Zagrebu je počelo kišiti u 1 s. 45 m. po podne, a u Čazmi u 3 s. 35 m., dakle 1 s. 51 m. kasnije. Za računanje brzine nevremena ne možemo rabiti izobrontu prve grmljavine, jer nas ta vodi do nemoguće brzine od 150 km po satu. Uzmemo li pako, da je u Zagrebu počela kiša, kada je najjače grmilo, a da je u Čazmi bilo najjače nevrijeme u 3 s. 50 m. po podne t. j. malo prije nego što je počela tuča, to proizlazi iz razlike vremena od 2 s. 5 m. i udaljenosti od 50 km brzina od 24 km po satu. Iz same razlike vremena izmedju početka kiše u Zagrebu i Čazmi slijedi brzina od 20 km. Ne ću mnogo pogriješiti, ako uzmem kao pravu brzinu 25 km po satu. Pošto je ravnom linijom od Šumećana do Čazme 8 km, to je moralo nevrijeme bjesniti u Šumećanima u 3 s. 30 m. od prilike, a ne kako g. Cvijanović, doduše samo od prilike, 3 sata u svom izvješću navadja.

Ni u Zagrebu ni u Šumećanima nijesu oblaci prije nevremena svojim oblikom pokazivali kakvu osobitost, kojom bi se razlikovali od oblaka običnih ljetnih nevremena. U Zagrebu su već rano u jutro dolazili Ci (Str. Cirri) od SW, a do podne se je sve naoblačilo.

Cumulo-Nimbi (Masivni oblak nevremena) dolazili su od WSW. Naprijed okrugljasti rastrgani oblačići, koji se čine da vise iz mase oblaka, a čine na nebu ogroman luk sa središtem na onoj strani horizonta odakle dolazi nevrijeme (W), a iza njih jednolično naoblačeno nebo sive boje. Iz tog jednolično naoblačenog neba kiši ili pada tuča. To je bila slika oblaka u Zagrebu onog dana. Takovi oblaci sa karakterističnim lukom (Köppenov Sturmkragen) pokazuju nam prednji dio vira horizontalne osi, te su karakteristični za svako jače nevrijeme. Tako su od prilike morali izgledati oblaci prije oluje i u Šumećanima, kako se vidi iz izvješća g. Cvijanovića.

Čim je nevrijeme na svom putu od W prema E došlo iz ravnice do brežuljaka, rastavilo se u više virova vertikalne osi (vijora), od kojih su pojedini do zemlje doprli i tuj štetu nanijeli. Gosp. Cvijanović kaže u svom izvješću, da su oblaci za najjačeg vihra bili na zemlji, što je moguće samo kod jake uzlazeće struje u vijoru. Odmah iza najjačeg vjetra, koji je duvao sa svih strana, došla je tuča sa vjetrom od WNW, što nas upućuje na stražnju stranu vijora sa ciklonalnim gibanjem oko osi. Od Šumečana išao je vijor prema Palančanom, a odavle prema potoku Česmi, spuštajuć se po više puta do zemlje i dižuć se opet u vis.

U Palančanima odnesao je nekoliko stogova sijena, povalio mnogo voćaka i kukuruzu. i počinio druge štete. Odavle je došao do šume Bosiljevački lug (45° 44′ sj. š. i 34° 15′ EF) 2 km jugoistočno od sela Bosiljevo, a 3 km jugo-zapadno od Čazme i počinio velike štete u 200 god. staroj šumi. Povalio je preko 200 hrastovih i bukovih stabala, do 70 cm debelih. Zapadno od stare šume je mlada šuma, u kojoj je povaljeno samo po koje stablo. Da se je vijor dizao i spuštao, potvrdjuju seljaci iz Bosiljeva, koji su gledali kako se s neba spušta na šumu kao kakov plašt. Vidjeli su pače, kako se je čitava šuma prigibala, tako da su pače i toranj Pobijeničke crkve mogli viditi (što je nemoguće). Za najveće oluje bila je posvemašnja tmica, a ljudi su od straha pobježali u kuće. Jedna žena, koja je bila u to vrijeme tik poharane šume južno od Česme, ne zna drugo kazati, osim da se je našla u posvemašnjoj tmici i da je bio strahovit vihar.

Iza Bosiljevačkog luga ne ima više traga vijoru, a teško je naći traga i samom nevremenu. Gosp. Horvat, kotarski sudac u Čazmi, pripovjeda, da je vidio, kako je u 4 s. 25 m. po podne, na jednom

mjestu u NE od Čazme kakova 4 km daleko, nekoliko minuta strašno bljeskalo i grmilo, a iza toga sve se umirilo.

Skicu poharane šume prerisao sam iz katastralne mape i reducirao na mjerilo 1:4000. AA je velika prosjeka kroz šumu, BB ja medja med starom i mladom šumom, a CC je trag kakove starinske prosjeke ili možda jarka.

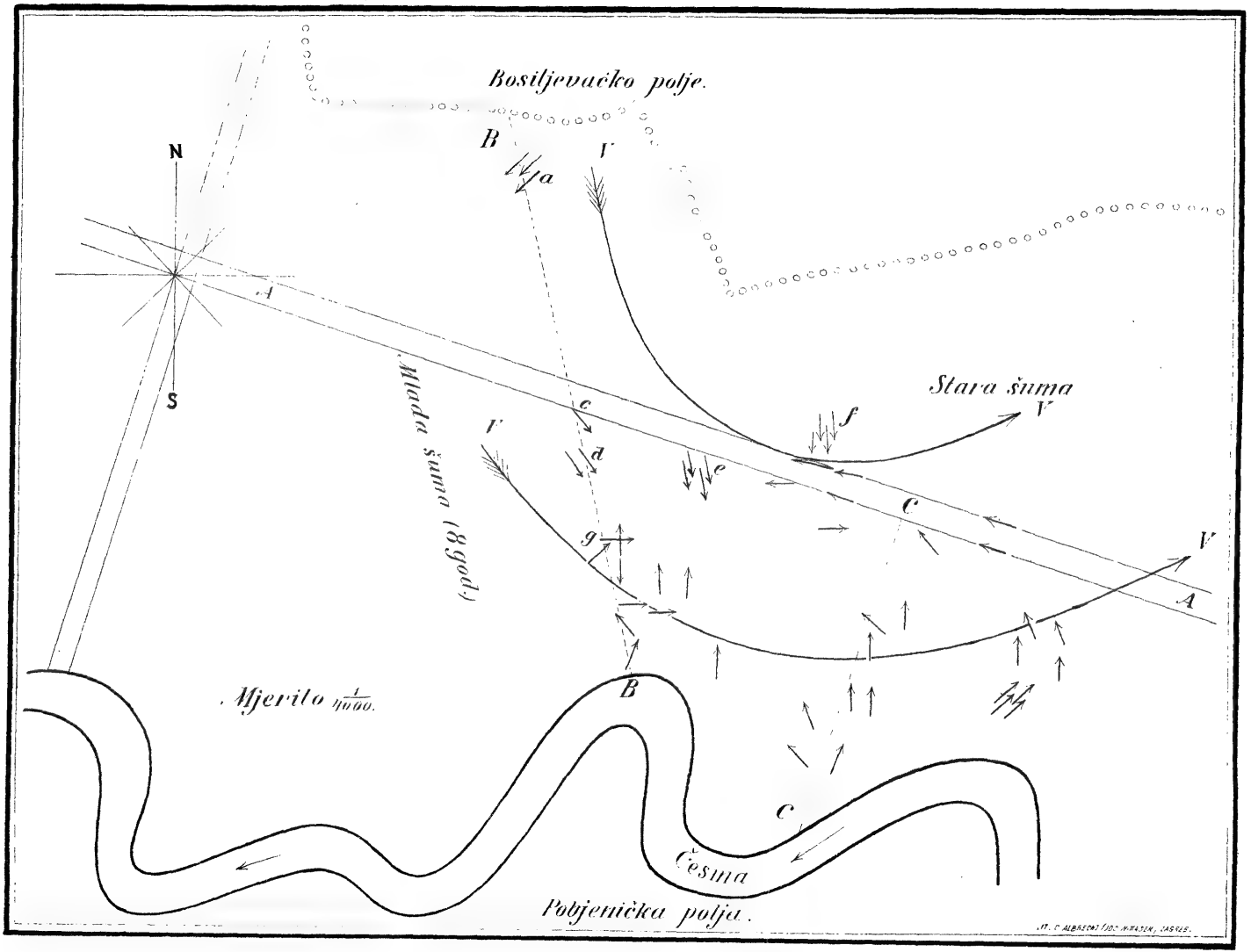
Iz položaja povaljenog drveća vidi se na prvi pogled ciklonalno gibanje oko središta vijora. Većina drveća je porušena na prednjoj strani vijora, računajuć da je išao od W prema E. Nego, ako se i uzme u obzir, da nije palo svako drvo točno onim smjerom, kojim je vjetar duvao u onaj čas, kad se je počelo rušiti. ipak se položaj svakog drva ne da svesti u sklad sa putem jednog vijora samog, nego se čini, da su tu bila dva vijora, koji su prošli šumom smjerom VV i V_1 V_1 (slika) i to jedan za drugim. Stabla porušena kod a, b, c, d, e, f, g, označuju put vijora V, V, a ostala put vijora V_1 V_1.

Da je takovih slabijih vijora valjda i više bilo, svjedoči još i ta okolnost, što mi je g. Kolibaš naknadno javio, da je našao u mladoj šumi 1500 m daleko u WSW od bosiljevačkog luga nešto porušenog drveća i priposlao mi skicu.

Kako se vidi iz priložene slike, put pojedinih vijora nije bio pravocrtan nego krivudast. Polumjer pojedinih vijora je jako teško odrediti. Uzmemo li kao minimum za taj polumjer udaljenost od središta vijora do najdalnjeg stabla, koje je porušio, to bi iz slike proizašao polumjer od 130 metara.

Evo u kratko ono, što sam mogao konstatovati.

Zahvaliti moram ovdje na izdašnoj pomoći, što mi je pružio prije svega g. Piškorić iz Čazme i g. Cvijanović iz Šumećana, zatim gg. kotarski upravitelj Mühlstein, kotarski mjernik Petrović, kotarski šumar Kolibaš i šumar imovne općine Mark. Ova trojica su mi poslala svoje skice porušenog terraina.



Rad jugoslavenske akademije knj. CXXXV.

Jedan pogled na prirodu transcendenata
definisanih diferencijalnim jednačinama prvoga reda sa promjenljivim parametrima.

Čitano u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 11. siečnja 1898.

NAPISAO ČLAN DOPISNIK MIHAILO PETROVIĆ, PROF. VEL. ŠKOLE U BIOGRADU.

Za jednu se količinu kaže, da je izračunata u eksplicitnom i konačnom obliku, ako je ńeno izračunavańe svedeno na koju od današńih elementarnih funkcija, ili na kombinacije od više takvih funkcija. A pod elementarnim funkcijama ili analitičkim elementima razumiju se najprostiji tipovi funkcija sa ispitanim i poznatim osobinama, nesvodljivi jedan na drugi ili na kombinacije više takvih tipova. Izraz „kombinacija“ vaļa uzeti u ńegovom širem smislu; operacije, koje se pod ńime razumiju, jesu: četiri osnovne aritmetičke operacije, za tim one, u kojima je oličen sam analitički smisao takvih elemenata, i na posļetku inversija, i to kad su ove operacije upotrebļene u konačnom broju i u ma kome bilo redu.

Broj analitičkih elemenata, kojima se danas služi matematička analiza, veoma je malen prema broju funkcija, koje se u računima javļaju. U ove se elemente za danas uračunavaju n. pr. funkcije: x^m, e^{ax}, osnovne eliptične funkcije, modularne, Kleinove, Fuchsove i Beselove transcendente, funkcije $\Gamma(x)$, $Li(x)$ (integralni logaritam) itd. Sve su to među sobom nezavisni, jedan na drugi nesvodļivi tipovi funkcija, čije su osobine ispitane i na čije se kombinacije svodi veoma velik broj funkcija, sa kojima se ima posla u matematičkoj analizi.

Među tim i broj funkcija, u opće, i broj takvih nesvodļivih tipova beskonačno je velik i mogućno ih je definisati na razne načine:

1. Pomoću beskonačnih redova raznovrsnih oblika. Ovakav je način definisańa transcendenata veoma generalan, pošto se zna, da

se svaka analitična funkcija može razviti u Taylor-ov red, ako ne za sve vrijednosti nezavisno promjenljive količine, a ono bar za vrijednosti, koje se nalaze u izvjesnim oblastima brojne ravni.

2. Pomoću kakvih naročitih osobina, za koje se traži da ih ima funkcija. Tako se n. pr. eksponencijalna funkcija e^x može definisati kao funkcija $u(x)$ holomorfna u cijeloj ravni, koja ima periodu $2\pi\sqrt{-1}$ i koja je takva, da svakoj vrijednosti u takve funkcije odgovara beskonačno mnogo vrijednosti nezavisno promjenljive količine x, koje se razlikuju za $2\pi\sqrt{-1}$. Isto tako, eliptične funkcije mogu se definisati kao uniformne funkcije u cijeloj ravni sa dvije periode, čiji je količnik imaginaran. Abelove funkcije i specijalni tipovi, u koje ove degenerišu, mogu se definisati kao funkcije za koje vrijedi algebarska adiciona teorema itd.

3. Pomoću diferencijalnih jednačina. Velik broj danas poznatih i ispitanih transcendenata zadovoljava algebarske diferencijalne jednačine prvoga ili višega reda. Pod ovaj bi se način imalo podvesti i definisańe funkcija pomoću diferencijalnih jednačina, koje sadrže kakav parametar, a integral se smatra kao funkcija toga parametra.

Definisańe pomoću beskonačnih redova naročito je zgodno za izračunavańe brojnih vrijednosti, koje funkcija ili ńeni uzastopni izvodi dobijaju za date vrijednosti nezavisno promjenljive količine, ali je vrlo neugodno za proučavańe osnovnih osobina funkcije i najznatnije osobine takvih funkcija ostaju skrivene. U pojedinim specijalnim slučajevima to je proučavańe po katkad još i mogućno, kao n. pr. za redove, koji prikazuju funkcije e^x, $\Theta(x)$, $\Gamma(x)$, Beselove transcendente itd. U novije su vrijeme naročito čińeni pokušaji za takvo ispitivańe funkcionalnih osobina pomoću beskonačnih redova, u koje su one razvijene. Poznate su značajne teoreme Eisenstein-a i Čebičeva o redovima, koji prikazuju algebarske funkcije ili funkcije što se dobijaju kombinacijama algebarskih, eksponencijalnih i logaritamskih funkcija G. g. Hadamard i Cahen dali su u posljedńe vrijeme nekoliko općenitijih rezultata u tome pogledu.

Slaba je strana ovakvoga načina definisańa i ta, što u opće nema nikakve karakteristične veze između sačinilaca reda jednoga prostog tipa funkcija i drugih složenijih funkcija, koje se svode na kombinacije toga prostoga tipa, tako, da baš i kad bi bile ispitane osobine takvoga tipa, to bi bilo bez širega interesa i ne bi se znalo, proučavańe kojih se funkcija može svesti na proučavańe toga beskonačnog reda. Izvjesno je, da je mogućno izabrati beskonačno

mnogo funkcija definisanih redovima veoma prostoga oblika, a koji do sad nijesu bili ispitivani, i među ovima izvjesno bi ih bilo i takvih, kod kojih je mogućno proučiti i osnovne osobine nove transcendente, koju oni definišu. Ali pored svega toga stvar bi bila od neznatnoga interesa i ostala bi neriješena baš ova bitna pitańa:

1. Da li je tako obrazovana transcendenta odista nova, ili se može svesti na kombinacije već proučenih transcendenata?

2. Ako je odista nova i nesvodljiva, koje se složenije funkcije mogu svesti na ńene kombinacije i u kojim bi pitańima matematičke analize takva nova transcendenta činila usluga i bila sa uspjehom upotrebljena? Jer od svakoga novog analitičkog elementa traži se, između ostalih, i taj osnovni uslov, da ńegovo uvođeńe u analizu doprinese riješeńu kakvih općenitijih pitańa i da takav elemenat bude u isto vrijeme i elemenat redukcije za čitave grupe pitańa. Transcendente $\Gamma(x)$ i $Li(x)$ n. pr. uvedene su u nauku baš s toga, što se na ńih, kao elemente redukcije, svodi izračunavańe čitavih klasa određenih integrala. Na protiv, transcendenta n. pr.

$$\Theta(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$

definisana je beskonačnim redom, konvergentnim za sve vrijednosti promjenljive x i bila bi nova, nesvodljiva, do sad neispitana transcendenta i izvjesne bi joj se osobine mogle raspoznati na samome beskonačnom redu, kojim je prikazana; ali za sad je nemogućno naći ni jedno općenitije pitańe, u kome bi se ona pojavljala i u kome bi ńeno uvođeńe, kao analitičnog elementa, učinilo kakvih usluga.

Definisańe transcendenata pomoću u naprijed impoziranih funkcionalnih osobina u toliko je od koristi, što, ako je uspjelo prema takvoj definiciji naći još i drugih osobina iste funkcije i time je što bolje odrediti, time je poznato baš ono, što je kod jedne funkcije i najglavnije znati Ali baš tako preciziraće funkcije prema u naprijed impoziranim osobinama zadaje ogromnih teškoća i radovi gg. Appell-a[1], Picard-a[2], Poincaré-a[3], Koenigs-a[4] i Grevy-a

[1] Journal de Mathematiques pures et appliquées, 1891.
[2] Acta mathematica 1894.
[3] Journal de Mathematiques pures et appliquées 1890.
[4] Annales de l'Ecole Normale Superieure 1887—1894.; Recuiel des Savants Etrangers etc. 1894.

na tome polu dovolno pokazuju kolike su te teškoće, pored svega toga, što su osobine, od kojih su pomenuti matematičari pošli, od najprostijih mogućnih funkcionalnih osobina.

Na posljedku, definisańe transcendenata pomoću diferencijalnih jednačina obuhvata veoma prostrane klase funkcija i do sada se pokazalo kao obilat izvor novih analitičkih elemenata, koje je moguće dublje ispitati i čije uvođeńe u matematičku analizu čini stvarnih usluga u velikome broju pitańa od općenitijega značaja. Dovolno je navesti usluge, koje je uvođeńe eliptičnih, Beselovih, Fuchsovih, Kleinovih itd. funkcija učinilo u raznolikim pitańima matematičke analize, nerješivim prije toga.

Ovaj način definisańa funkcija ima i tu dobru stranu, što se pomoću diferencijalne jednačine može i sama funkcija razviti u beskonačan red, koji će biti raznog oblika prema prirodi vrijednosti nezavisno promjenlive količine, za koje se traži da red vrijedi, a u isto vrijeme, u velikom broju slučajeva mogu se i u pojedinostima ispitati najznatnije osobine tražene funkcije. To je ispitivańe bilo predmet klasičnih radova Briot-a, Bouquet-a, Picard-a, Poincaré-a i Fuchs-a o metodama za razvijańe integrala diferencijalnih jednačina u beskonačne redove, o oblicima ovih redova prema raznim vrijednostima nezavisno promjenlive količine i o osnovnim osobinama funkcija definisanih takvim diferencijalnim jednačinama.

Znatnost ovakvoga načina definisańa funkcija i u tome je, što se ńime došlo do elemenata redukcije prostranih klasa transcendenata definisanih diferencijalnim jednačima i što se pokazalo, da se proučavańe takvih klasa transcendenata svodi na proučavańe nekolikih prostih i nesvodlivih tipova. Tako, pokazano je, da se sve uniformne transcendente, koje postaju integracijom algebarskih diferencijalnih jednačina prvoga reda, u kojima ne dolazi eksplicitno nezavisno promjenliva količina, svode na racionalne kombinacije eksponencijalne ili eliptične funkcije. U slučaju, kad nezavisno promjenliva x dolazi eksplicitno u jednačini, pokazano je da se uniformne transcendente, kad zavise o integracionoj konstanti, svode na kombinacije eliptičnih funkcija, izvjesnih funkcija dobijenih kvadraturama iz sačinilaca date jednačine i uniformnih transcendenata, što postaju integracijom Riccati-eve jednačine. Slični su rezultati dobijeni i za multiformne funkcije sa konačnim brojem vrijednosti, a koje zadovolavaju algebarske diferencijalne jednačine

prvoga reda, za uniformne transcendente, koje se dobijaju integracijom linearnih jednačina itd.

A takve redukcije jedan su od glavnih ciļeva moderne matematičke analize. Izvjesno je da se danas sve više osjeća potreba uvođeńa novih nesvodļivih transcendenata, kao elemenata redukcije u računima. Veoma je velik broj računa, koji se ne mogu privesti kraju pomoću do danas ispitanih i u analizu uvedenih transcendenata. Ali uvođeńe novih elemenata traži:

1. Da se znaju pitańa, u kojima se javļa stvarna potreba takovoga uvođeńa i da se tačno zna, od čega dolazi nemogućnost ńihovog rješavańa pomoću današńih analitičkih elemenata.

2. Da se znaju izvori novih transcendenata, obilatost takvih izvora i način, na koji vaļa iz ńih izvoditi pojedine nove elementarne transcendente.

Kao što je pomenuto, za diferencijalne jednačine zna se, da su odista obilat izvor transcendenata, smatrajući integral bilo kao funkciju nezavisno promjenļive količine, bilo kao funkciju parametara, što u diferencijalnoj jednačini dolaze, bilo, na posļjetku, kao funkciju integracionih konstanata.

Ja sam namjeran u ovome radu, ograničivši se na jednačine prvoga reda, učiniti njekoliko primjetaba, koje idu u prilog rasvjetļavańu ovakvih pitańa i izvesti njekoliko podataka o analitičkoj prirodi transcendenata, koje su u takvim jednačinama skrivene.

* * *

Neka je data opća algebarska diferencijalna jednačina prvoga reda

$$(1) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \alpha, \beta, \gamma \ldots\right) = 0$$

gdje je F algebarska funkcija nepoznate funkcije y i ńenoga izvoda $\frac{dy}{dx}$ po nezavisno promjenļivoj količini x (ova se funkcija uvijek može zamisliti, da je napisana u obliku polinoma po y u izvodu), a ma kakva funkcija x-a i parametara $\alpha, \beta, \gamma \ldots$., koja se svodi na kombinacije današńih ispitanih funkcija.

Zamislimo najprije ove parametre stalne i smatrajmo opći integral jednačine kao funkciju integracione promjenļive x. Kakva će tada biti analitička priroda *uniformnih* transcendenata, koje prikazuju

opći integral i koji su elementi redukcije, na čije se kombinacije mogu svesti takve transcendente?

Za slučaj, kad x ne dolazi eksplicitno u diferencijalnoj jednačini, Briot i Bouquet su našli, da se ove transcendente svode ili na racionalne kombinacije eksponencijalne funkcije e^{ax}, ili na racionalne kombinacije eliptične funkcije $sn(ax)$ i njenoga izvoda po x (gdje je a kakva stalna i određena količina). *Kao elementi redukcije u tome slučaju javljaju se, dakle, ove dvije prste i nesvodljive transcendente* e^{ax} *i* $sn(ax)$.

Za slučaj, kad x dolazi u jednačini, g. Poincaré[1] je pokazao, da se uniformna transcendenta, što prikazuje integral, svodi:

1. ili na algebarske kombinacije sačinilaca φ_i $(x, \alpha, \beta, \gamma \ldots .)$, što dolaze u diferencijalnoj jednačini (1);

2. ili na algebarske kombinacije sačinilaca φ_i i transcendente

$$Sn\left[\int \Phi\,(x, \alpha, \beta, \gamma \ldots .)\,dx\right] \tag{2}$$

gdje je Φ izvjesna algebarska kombinacija sačinilaca φ_i:

3. ili na algebarske kombinacije sačinilaca φ_i i transcendenata $\Theta(x)$, definisanih Riccati-evom jednačinom

$$\frac{d\Theta}{dx} + f_1\,\Theta^2 + f_2\,\Theta + f_3 = 0 \tag{3}$$

gdje su funkcije f_1, f_2, f_3 izvjesne algebarske kombinacije sačinilaca φ_i.

Elementi redukcije za taj slučaj jesu dakle:

1. *Najprostije nesvodljive transcendente, što eksplicitno dolaze u samoj diferencijalnoj jednačini;*

2. *Transcendenta (2);*

3. *Transcendente* Θ, *definisane Riccati-evom jednačinom (3).*

Ako je diferencijalna jednačina algebarska i po promjenljivoj x, integral

$$\int \Phi\,dx$$

biće izvjesan Abelov integral, koji ne može imati više od dvije periode, i ove, u slučaju kad postoje, moraju biti ravne periodama

[1] Acta mathematica 1885.

eliptične funkcije Sn ili tim periodama pomnoženim kakvim cijelim brojem. U izvjesnim specijalnim slučajevima ovi se Abelovi integrali svode na racionalne funkcije x-a ili na logaritme; elementi redukcije tada jesu transcendente

$$Sn\left[(x-a)^m\right], \qquad Sn\left[a \log (x-b)\right]$$

gdje su a i b konstante a m kakav cio, pozitivan ili negativan, broj.

Transcendenta Θ biće integral izvjesne Riccati-eve jednačine sa algebarskim koeficijentima. Između transcendenata, koje tada mogu prikazivati funkciju Θ, nalaze se: eksponencijalne funkcije i ńihove racionalne kombinacije, Beselove, eliptične i hipergeometrijske transcendente itd. Za danas još nijesu u pojedinostima ispitane sve osnovne, nesvodļive, transcendente, koje se dobijaju integracijom Riccati-evih jednačina sa algebarskim sačiniocima, ali se zna, da ńihov broj nije velik i da su one u isto vrijeme i elementi redukcije za sve uniformne transcendente, koje se dobijaju integracijom algebarskih diferencijalnih jednačina prvoga reda, kod kojih je rod (genre, Gattung) relacije između nepoznate funkcije i ńenoga izvoda ravan nuli, a tako isto i za sve neuniformne transcendente sa stalnim kritičkim tačkama, dobijene integracijom takvih jednačina.

Za slučaj, kad polovi uniformnih transcendenata, dobijenih integracijom jednačine prvoga reda, ne zavise o integracionoj konstanti (što se lako razpoznaje na samoj datoj jednačini), ja sam dokazao[1] da se te transcendente svode:

1. ili na algebarske kombinacije transcendenata φ_i, što eksplicitno dolaze u datoj jednačini;

2. ili na algebarske kombinacije transcendenata φ_i i onih, do kojih se dolazi operacijama

$$e^{\int \bar{\omega}(x)\,dx}, \qquad \int \chi(x) e^{\int \bar{\omega}(x)\,dx}\,dx$$

gdje su $\bar{\omega}(x)$ i $\chi(x)$ opet algebarske kombinacije transcendenata φ_i.

[1] Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations differentielles algébriques, Paris 1894.

Ako je diferencijalna jednačina algebarska i po integracionoj promjenljivoj x, funkcije ω i χ algebarske su i transcendente, koje dolaze u općem integralu, jesu racionalne kombinacije promjenljive x i transcendenata

$$e^{J(x)}, \qquad \int \chi(x)\, e^{J(x)}\, dx$$

gđe je $J(x)$ izvjesan Abelov integral, za koji sam dokazao da

1. ako je stepen jednačine po izvodu neparan, $J(x)$ se svodi na zbir algebarskih i logaritamskih funkcija i tada se integral svodi na racionalne kombinacije transcendenata

$$e^{R(x)} \qquad \text{i} \qquad \int (x-a)^m e^{R(x)}\, dx$$

gđe je $R(x)$ kakva racionalna funkcija x-a, a m cio, pozitivan ili negativan broj, ili, što je jedno isto, na racionalne kombinacije izraza

$$\sin R(x), \qquad \cos R(x),$$
$$\int \chi(x) \sin R(x)\, dx, \qquad \int \chi(x) \cos R(x)\, dx$$

Kao elementi redukcije javljaju se transcendente

$$e^{(x-a)^m} \qquad \text{i} \qquad \int (x-b)^n e^{R(x)}\, dx$$

ili
$$\sin (x-a)^m, \qquad \cos (x-a)^m,$$
$$\int (x-b)^n \sin R(x)\, dx, \qquad \int (x-b)^n \cos R(x)\, dx$$

gdje su m i n cijeli, pozitivni ili negativni brojevi.

2. Ako je pomenuti stepen paran, *Abelov integral $J(x)$ svodi se na izvjesan hipereliptični integral.*

Prema ovim se rezultatima može precizirati i analitička priroda *holomorfnih* transcendenata, koje se dobijaju integracijom diferencijalnih jednačina prvoga reda. Tako, ako je jednačina algebarska po x i ako je ńen stepen po izvodu neparan, ńen će *opći integral, kad je on holomorfna funkcija x-a, biti izvjesan polinom po x i po*

izrazu $e^{P(x)}$ *ili po sin* $P(x)$, *cos* $P(x)$, gdje je $P(x)$ kakav polinom po x; ako je stepen paran, priroda integrala *zavisiće od hipereliptičnog integrala* $J(x)$.

G. Painlevé je dokazao[1], da se g. *Poincaré-jevi elementi redukcije javljaju i u slučajevima, kad je opći integral multiformna funkcija integracione promjenljive količine, ali sa konačnim brojem vrijednosti.* U ostalom uniformne i multiformne funkcije sa konačnim brojem vrijednosti prikazuju najznatniju čest analitičnih funkcija; one, a naročito uniformne funkcije, zauzimaju najuglednije mjesto u modernoj teoriji funkcija i jedan naročiti fakt, pronađen u posljedńe vrijeme, učinio je da se uveća znatnost uniformnih transcendenata i da se cjelokupna teorija funkcija svede na ńihovo proučavańe. Taj se fakt sastoji u značajnome rezultatu, do koga je u posljedńe vrijeme došao g. Poincaré[2]: da se uvijek ma kakva funkcija i ńena nezavisno promjenljiva količina mogu izraziti kao uniformne funkcije jednoga parametra i da se na taj način izučavańe svijuh multiformnih funkcija može svesti na izučavańe uniformnih funkcija. Time je dokazano, da se težište cjelokupne teorije funkcija nalazi u teoriji uniformnih transcendenata.

Malo čas je kazano, kakve se uniformne transcendente dobijaju integracijom diferencijalnih jednačina prvoga reda, u slučaju, kad takve transcendente zavise o integracionoj konstanti. U ovome što prethodi precizirana je analitička priroda takvih uniformnih transcendenata i pokazano da elementi redukcije, na čije se kombinacije one svode, nijesu veoma mnogobrojni.

Ali može se desiti, da diferencijalnu jednačinu zadovoljavaju jedna ili više uniformnih funkcija, koje ne zavise o integracionoj konstanti. Drugim riječima, može se desiti, da opći integral jednačine nije uniforman, ali da postoji jedan ili više partikularnih uniformnih integrala. Kakva je tada analitička priroda takvih uniformnih transcendenata i kakvi u tima slučajevima mogu biti elementi redukcije?

Pitańe je prema današńem stańu matematičke analize nerješljivo. U opće, proučavańe partikularnih integrala diferencijalnih jednačina skopčano je sa mnogo većim teškoćama, no proučavańe općega integrala i rezultati do sad dobijeni u tome pravcu sasvim su ne-

[1] Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre, Paris 1892.

[2] Bulletin de la Société mathematique de France, 1883.

dovolni, da rasvijetle pitaňe, o kome je riječ. G. Painlevé[1] je dao jednu metodu za raspoznavaňe, da li jednačina ima *racionalnih* partikularnih integrala i za ňihovo izračunavaňe u slučaju, kad postoje, ali je ta metoda nemoćna za istraživaňe *transcendentnih* uniformnih integrala. Ja sam dokazao[2], u slučaju kad je rod jednačine po nepoznatoj funkciji i ňenome izvodu ravan nuli, a kad je jednačina algebarska po x, y, y', ovaj rezultat: *takva jednačina ne može imati više od tri partikularna uniformna integrala, koji bi bili prikazani transcendentama različnim medjusobno, t. j. između kojih ne bi postojao kakav algebarski odnos.* Ali kakva je analitična priroda ovih transcendenata i koji su elementi redukcije za ňih, za danas je nemogućno znati.

Ja sam za izvjesne opće slučajeve pokazao[3] (n. pr. kad su vrijednosti, što poništavaju ili čine beskonačnim opći integral, nezavisne o integracionoj konstanti, što se uvijek raspoznaje neposredno na datoj diferencijalnoj jednačini), kako se može pomoću Weierstrass-ove teoreme o razlagaňu uniformnih funkcija na primarne činioce, svesti traženje *uniformnih* transcendenata, koje prikazuju partikularne integrale diferencijalnih jednačina prvoga reda, na izračunavaňe jedne izvjesne *holomorfne* funkcije, koja se opet dobija kao integral jedne diferencijalne jednačine prvoga reda. Ovo izračunavaňe mogućno je samo pomoću beskonačnih redova, a iz ovih je nemogućno saznati što o osobinama i prirodi transcendenata, koju red prikazuje i o ňenim elementima redukcije, čijom je kombinacijom dobijena.

No pored svega toga, na osnovu gore navedenih rezultata i svega onoga, što se do danas zna o diferencijalnim jednačinama oblika (1), gdje u F dolaze obične današňe funkcije, može se tvrditi da *kad se integral smatra kao funkcija integracione promjenljive x, broj nesvodljivih, elementarnih, transcendenata, do kojih se dolazi ňihovom integracijom, nije velik* i da se velik broj do danas ispitanih i u analizu uvedenih transcendenata ne nalazi u broju onih, što se dobijaju integracijom takvih jednačina.

---

[1] Comptes rendus de l' Academie des Sciences de Paris t. CX. 1890. i Annales de l' Ecole Norm. Sup. 1892.

[2] Comptes rendus de l' Academie des Sciences de Paris, Mai 1894. i Picard: Traité d' Analyse t. III. p. 356—359.

[3] Sur les zéros et les infinis des intégrales, Paris 1894.

Tako n. pr. za transcendentu $\Gamma(x)$, Fredholm-ovu transcendentu

$$(4) \quad \lambda(a, x) = \sum_{0}^{\infty} a^n x^{n^2} \qquad |a| < 1, \qquad |x| < 1,$$

Fuchsove, Kleinove, modularne funkcije i ńihove kombinacije zna se da se nikad ne mogu dobiti integracijom diferencijalne jednačine (1). U ostalom, za neke od ovih transcendenata, kao n. pr. za funkcije $\Gamma(x)$ i $\lambda(a, x)$ dokazano je, da se ne mogu dobiti integracijom nikakve algebarske diferencijalne jednačine, pa ma koga reda ona bila.

* * *

Ali uočimo sad jednačinu (1) sa druge ńene strane: smatrajmo integral ne kao funkciju integracione promjenļive količine x, već kao funkciju jednoga od parametara α, β, γ . . . . što u jednačini dolaze, dajući promjenļivoj x kakvu stalnu vrijednost $x = a$.

I površnim posmatranjem lako se uvjeriti, da jednačina postaje tada veoma obilat izvor transcendenata i da se među ovima nalaze i one, koje je nemogućno imati smatrajući u integralu x kao nezavisno promjenļivu količinu.

Tako, ako se u općem integralu proste diferencijalne jednačine

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha y}{x} + e^{-x} = 0,$$

koji je

$$y = x^{-\alpha}\left[C - \int e^{-x} x^{\alpha}\, dx\right]$$

stavi da je $x = \infty$, proizvod $x^{\alpha} y$ postaje izvjesna funkcija $\Theta(\alpha)$ parametra α i to oblika

$$\Theta(\alpha) = K - \Gamma(\alpha + 1)$$

gdje je K integraciona konstanta, nezavisna o α.

Funkcija Γ, koja ne može postati integracijom nikakve algebarske diferencijalne jednačine, dobija se dakle integracijom jedne od najprostijih jednačina prvoga reda, ali kad se u integralu smatra parametar kao promjenļiva količina, a x kao stalno.

*

Isto tako, ako se u općem integralu jednačine

$$\frac{dy}{dx} + \alpha xy + \frac{1 - \beta \cos x}{1 - 2\beta \cos x + \beta^2} = 0$$

koji je

$$y = e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} \left[C - \int \frac{1 - \beta \cos x}{1 - 2\beta \cos x + \beta^2} e^{\frac{\alpha x^2}{2}} dx \right]$$

stavi da je $x = \infty$, proizvod

$$ye^{\frac{\alpha x^2}{2}}$$

postaje funkcija $\Theta(\alpha, \beta)$ parametara α i β definisana obrascem

$$\Theta(\alpha, \beta) = k - \lambda\left(\beta, e^{\frac{2}{\alpha}}\right)$$

gdje $\lambda(a, x)$ prikazuje Fredholm-ovu transcendentu, definisanu obrascem (4). Ovo izlazi neposredno iz integralnog obrasca

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^z \cos q}{1 - 2e^z \cos q + e^{2z}} e^{\alpha q^2} dq = 2\sqrt{-\frac{\alpha}{\pi}} \left[1 + e^{\frac{1}{4\alpha} + z} + \right.$$

$$\left. + e^{\frac{4}{4\alpha} + z^2} + e^{\frac{9}{4\alpha} + z^3} + \cdots \right]$$

koji vrijedi za vrijednosti α i z, za koje je[1]

$$|e^z| < 1, \qquad |e^\alpha| < 1$$

Uočimo Hermite-ovu transcendentu

$$Z(\alpha) = A\alpha + \frac{1}{\alpha} + \Sigma\left(\frac{1}{\alpha - \Omega} + \frac{1}{\Omega} + \frac{1}{\Omega^2}\right)$$

gdje je $\Omega = am + bn$, $\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

[1] Glas LI. Kraļ. Srp. Akademije, str. 175.

od kojih je vrijednosti isključen samo par $(m = 0,\ n = 0)$ i gdje je količnik $\frac{a}{b}$ kompleksan broj. Izberimo šest konstanata $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_6$ tako, da za date vrijednosti x bude

$$
\begin{array}{lll}
-\lambda_1 a < 0 & -\lambda_1 b < 0 & \lambda_1 (x - a - b) < 0 \\
-\lambda_2 a < 0 & -\lambda_2 b < 0 & \lambda_2 (x - a) < 0 \\
\lambda_3 a < 0 & -\lambda_3 b < 0 & \lambda_3 (x - b) < 0 \\
\lambda_4 a < 0 & \lambda_4 b < 0 & \lambda_4 (x + a + b) < 0 \\
\lambda_5 a < 0 & \lambda_5 (x + a) < 0 & \\
\lambda_6 a < 0 & \lambda_6 (x + b) < 0 &
\end{array}
$$

Imajući na umu da je Z periodična funkcija promjenljive x i da se ne mijeńa kad se toj promjenljivoj doda količina kx, gdje je k ma kakav cio, pozitivan ili negativan broj, lako se uviđa da je odredba konstanata λ_i, što zadovoljavaju gorńe pogodbe, uvijek mogućna, pa ma kakva bila vrijednost promjenljive x. I kad su te konstante na taj način izabrane, ja sam pokazao[1] da, ako se stavi da je

$$
\frac{\lambda_1 e^{(-a+b)\lambda_1 x}}{\left(1 - e^{-\lambda_1 a x}\right)\left(1 - e^{-\lambda_1 b x}\right)} + \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_2 a x}}{\left(1 - e^{-\lambda_2 a x}\right)\left(1 - e^{\lambda_2 b x}\right)} +
$$

$$
+ \frac{\lambda_3 e^{-\lambda_3 b x}}{\left(1 - e^{\lambda_3 a x}\right)\left(1 - e^{-\lambda_3 b x}\right)} + \frac{\lambda_4 e^{\lambda_4 (a+b) x}}{\left(1 - e^{\lambda_4 a x}\right)\left(1 - e^{\lambda_4 b x}\right)} +
$$

$$
+ \frac{\lambda_5 e^{\lambda_5 a x}}{1 - e^{\lambda_5 a x}} + \frac{\lambda_6 e^{\lambda_6 b x}}{1 - e^{\lambda_6 b x}} = F(x)
$$

$$
\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 (a - a - b) x}}{\left(1 - e^{-\lambda_1 a x}\right)\left(1 - e^{-\lambda_1 b x}\right)} + \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 (a - a) x}}{\left(1 - e^{-\lambda_2 a x}\right)\left(1 - e^{\lambda_2 b x}\right)} +
$$

[1] Glas LI. Kraļ. Srp. Akademije, str. 236.

$$+\frac{\lambda_3 e^{\lambda_3(\alpha-b)x}}{\left(1-e^{\lambda_3 ax}\right)\left(1-e^{-\lambda_3 bx}\right)}+\frac{\lambda_4 e^{\lambda_4(\alpha+a+b)x}}{\left(1-e^{\lambda_4 ax}\right)\left(1-e^{\lambda_4 bx}\right)}+$$

$$+\frac{\lambda_5 e^{\lambda_5(\alpha+a)x}}{1-e^{\lambda_5 ax}}+\frac{\lambda_6 e^{\lambda_6(\alpha+b)}}{1-e^{\lambda_6 bx}}=\Phi(\alpha, x)$$

biće

$$Z(\alpha)=A\alpha+\frac{1}{\alpha}+\int_0^\infty\left[(1+x)F(x)-\Phi(\alpha, x)\right]dx$$

Prema tome transcendenta $Z(\alpha)$ može se smatrati da je dobijena integracijom jedne izvjesne diferencijalne jednačine prvoga reda, u kojoj su sačinioci nepoznate funkcije i ńenog izvoda racionalne kombinacije promjenļive x, eksponencijalnih funkcija ove promjenļive i parametra α, pošto se u dobijenom integralu stavi da je $x=\infty$ i kad se parametar α smatra kao promjenļiva količina.

I ako se ima na umu, da se svaka meromorfna dvogubo-periodička funkcija $\Psi(\alpha)$ linearno izražava pomoću transcendente $Z(\alpha)$ i nekoliko ńenih uzastopnih izvoda po α, tako da je

$$\Psi(\alpha)=C+\sum_i\left[A_{1,i}Z(\alpha-\alpha_i)+A_{2,i}Z'(\alpha-\alpha_i)+\ldots+\right.$$

$$\left.+A_{k,i}Z^{(k)}(\alpha-\alpha_i)\right]$$

gdje je C izvjesna konstanta, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ polovi funkcije $\Psi(\alpha)$, k infinitezimalni red pola α_i, a $A_{1,i}$, $A_{2,i} \ldots A_{k,i}$ konstante, onda je time dokazano, da svaka meromorfna dvogubo-periodična funkcija može dobiti integracijom izvjesne diferencijalne jednačine pomenute vrste, kad se u integralu stavi da je $x=\infty$ a parametar α smatra kao promjenļiva količina.

I modularna funkcija $\varphi(\alpha)$ može biti definisana na sličan način. pomoću diferencijalnih jednačina prvoga reda sa jednim promjenļivim parametrom. Tako, uočimo diferencijalnu jednačinu

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 4t^3 - 27y(1+t)$$

u kojoj je y kao parametar i stavimo da je

$$\left.\begin{aligned} u(y) &= z(t) - z(1) \\ v(y) &= z(t) - z(0) \end{aligned}\right\} \text{ za } t = \infty$$

gdje $z(t)$ označava integral jednačine (5). Modularna funkcija $\varphi(\alpha)$ može se definisati kao inversija funkcije

$$\alpha = \frac{u(y)}{v(y)}$$

Ovo izlazi otuda, što, kao što se zna, modularna funkcija $y = \varphi(\alpha)$ postaje inversijom funkcije $\alpha(y)$ definisane količnikom od dva određena integrala

$$\alpha = \frac{\int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - 27t(1+t)}}}{\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - 27y(1+t)}}} = \frac{\omega_2(y)}{\omega_1(y)}$$

Tako isto integracija diferencijalne jednačine prvoga reda

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y(y-1)(y-\alpha)$$

kad se u integralu x smatra kao stalno, a α kao promjenljiva količina, dovodi do poznate uniformne transcendente $\omega(\alpha)$, koja je veoma zamašna u teoriji dvogubo-periodičnih funkcija, a koju bi također bilo nemogućno dobiti integracijom kakve jednačine prvoga reda, u kojoj dolaze obične funkcije $x - a$, kad bi se u dobijenom integralu x smatralo kao promjenljiva količina.

Iz ovih specijalnih slučajeva — i ako se pri tom uzme u račun i to, da je pomoću ńih lako obrazovati čitave klase diferencijalnih jednačina prvoga reda, čiji bi integrali, smatrani kao funkcije parametara, bili kombinacije malopređašńih transcendenata — već se vidi koliko je generalan ovaj način definisańa transcendenata i u

koliko bi bila opravdana nada, da će on dovesti do novih nesvodljivih funkcija, korisnih za matematičku analizu.

Ja ću se ovdje naročito zadržati kod ovoga načina definisaña analitičkih transcendenata i izvesti nekoliko općenitijih rezultata, koji se tiču funkcijâ parametara, što se javljaju kao granice integrala algebarskih diferencijalnih jednačina prvoga reda sa promjenljivim parametrima, a kad integraciona promjenljiva količina x teži izvjesnoj stalnoj, konačnoj ili beskonačnoj, granici.

Uočimo dakle opću algebarsku diferencijalnu jednačinu prvoga reda

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \alpha, \beta, \gamma \ldots\right) = 0 \tag{1}$$

gdje je F polinom po y i izvodu $\frac{dy}{dx}$, sa sačiniocima, koji su ma kakve funkcije $x - a$ i parametara $\alpha, \beta, \gamma \ldots$. Opći integral jednačine biće izvjesna funkcija

$$y = \varphi(x, C, \alpha, \beta, \gamma \ldots)$$

gdje je C integraciona konstanta.

Pustimo da x teži kakvoj određenoj (konačnoj ili beskonačnoj) granici $x = a$; integral y postaće izvjesna funkcija

$$y = \Theta(C, \alpha, \beta, \gamma \ldots)$$

parametara, koja može zavisiti ili biti nezavisna o integracionoj konstanti C, što će zavisiti o prirodi date jednačine (1) i o vrijednosti $x = a$ kojoj teži x. Tako n. pr. ako je data jednačina.

$$\frac{dy}{dx} + y^2 - \alpha = 0,$$

čiji je opći integral

$$y = -\sqrt{\alpha}\,\frac{1 - Ce^{2x\sqrt{\alpha}}}{1 + Ce^{2x\sqrt{\alpha}}},$$

funkcija $\Theta(\alpha)$, koja se javlja kao granica integrala y, kad x teži kakvoj konačnoj granici $x = a$, transcendentna je funkcija parametra α i zavisi o konstanti C; na protiv funkcija

$$\Theta(\alpha) = -\sqrt{\alpha}$$

koja se javlja kao granica istoga integrala za $x = \infty$ algebarska je i nezavisna o C.

U slučaju Riccati-eve jednačine sa promjenljivim sačiniocima

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + f(x, \alpha)\, y + \varphi(x, \alpha) = 0$$

funkcija je $\Theta(\alpha)$ za $x = \infty$ nezavisna o integracionoj konstanti: ona je ili neodređena, ili beskonačna ili ravna jednome od izraza

$$\frac{1}{2}(p + \sqrt{p^2 + 4q}), \qquad \frac{1}{2}(p - \sqrt{p^2 + 4q})$$

gdje je

$$\left.\begin{aligned} p &= lim\, f(x, \alpha) \\ q &= lim\, \varphi(x, \alpha) \end{aligned}\right\} \text{ za } x = \infty$$

U pogledu analitične prirode funkcija dobijenih na ovaj način, može se, prije svega, dokazati ova opća teorema:

Kad god za jednu vrijednost $x = a$ funkcija $\Theta(\alpha, \beta, \gamma \ldots)$, što joj odgovara, ne zavisi o integracionoj konstanti, ta će funkcija biti izvjesna **algebarska** *kombinacija onih funkcija parametara α, β, $\gamma \ldots$, koje eksplicitno dolaze u datoj diferencijalnoj jednačini.*

I u specijalnom slučaju kad su sačinioci diferencijalne jednačine *algebarske* funkcije parametara α, β, $\gamma \ldots$ (a ma kakve, algebarske ili transcendentne funkcije $x - a$), funkcija Θ biće i sama izvjesna *algebarska funkcija* tih parametara.

Da bi teoremu dokazali, pretpostavimo najprije da je vrijednost $x = a$ konačna i stavimo da je

$$x - a = t;$$

data diferencijalna jednačina postaće

$$(6) \qquad \Phi\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \alpha, \beta, \gamma \ldots\right) = 0$$

gdje je Φ izvjesan polinom po y i izvodu $\frac{dy}{dt}$. Funkcija $\Theta(\alpha, \beta, \gamma \ldots)$ prikazivaće tada granicu, kojoj teži opći integral

$$y\,(t,\ C,\ \alpha, \beta, \gamma \ldots) \tag{7}$$

za $t = 0$. Drugim riječima: ako se u jednačini (6) smatra y za nezavisno promjenljivu količinu, a t kao ńena funkcija, $\Theta(\alpha, \beta, \gamma \ldots)$ nije ništa drugo do ona vrijednost y koja poništava integral

$$t\,(y,\ C,\ \alpha, \beta, \gamma \ldots .) \tag{8}$$

jednačine (6), napisane u obliku

$$\Psi\,(y, t, \frac{dt}{dy},\ \alpha, \beta, \gamma \ldots .) = 0. \tag{9}$$

U slučaju, kad bi vrijednost $x = a$, za koju se traži odgovarajuća vrijednost Θ, bila $x = \infty$, stavili bismo da je

$$x = \frac{1}{t}, \qquad \frac{dy}{dx} = -\,t^2\,\frac{dy}{dt}$$

i neka je opet (9) nova diferencijalna jednačina, gdje se y smatra kao nezavisno promjenljiva količina a t kao ńena funkcija.

U oba slučaja, bilo da je vrijednost $x = a$ konačna ili beskonačno velika, traženje funkcije Θ svodi se na traženje vrijednosti y, za koje opći integral (8) jednačine (9) postaje ravan nuli. Ali iz analitične teorije diferencijalnih jednačina prvoga reda poznato je, da kad god vrijednosti nezavisno promjenljive količine, što poništavaju opći integral jedne jednačine prvoga reda, ne zavise o integracionoj konstanti, one poništavaju u isto vrijeme i jedan izvjesan sačinilac izvoda u diferencijalnoj jednačini, pošto se u ovome sačiniocu stavi da je taj integral ravan nuli. Tako za slučaj kad je jednačina

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

algebarska po nepoznatoj funkciji y i ńenome izvodu $\frac{dy}{dx}$ i ako se napiše u obliku

$$f_0\,(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^m + f_1\,(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \ldots + f_{m-1}\,(x, y)\,\frac{dy}{dx} +$$

$$+ f_m(x, y) = 0$$

gdje su $f_k(x, y)$ polinomi po y, ja sam dokazao ove dvije teoreme[1]:

I. Da bi vrijednosti nezavisno promjenljive količine x, koje poništavaju opći integral y, bile nezavisne o integracionoj konstanti, potrebno je i dovoljno, da svaka od funkcija $f_k(x, y)$ osim $f_0(x, y)$ sadrži kao činioca y, podignut na stepen ravan indeksu k ili veći od ńega.

II. Kad god pomenute vrijednosti ne zavise o integracionoj konstanti, one moraju biti ili $x = \infty$ ili korijeni jednačine

$$f_0(x, 0) = 0$$

ili vrijednosti, za koje jedna ili više funkcija $f_k(x, y)$ postaju beskonačne.

U svima ovim slučajevima vrijednosti nezavisno promjenljive, dobijene na takav način, zavise algebarski o sačiniocima date jednačine, pa dakle i o funkcijama parametara, koje u tim sačiniocima dolaze, čime je gorńa teorema dokazana.

Iz ove se teoreme neposredno izvodi, da se *pomenutim načinom postanka transcendenata samo onda može doći do transcendentalnih funkcija, različnih od onih, što eksplicitno dolaze u datoj diferencijalnoj jednačini, ako one zavise o integracionoj konstanti.*

Teorema se potvrđuje i gorńim primjerima, a ja ću ovdje pokazati, da ovakav način definisańa transcendenata odista dovodi na nove, nesvodljive, transcendente i da su takve transcendente, dobijene ovim putem, odista veoma mnogobrojne i raznovrsne. Zadržimo se prvo na linearnoj jednačini prvoga reda, *koja je u isto vrijeme i elemenat redukcije za sve one diferencijalne jednačine prvoga reda, koje je mogućno integraliti pomoću kvadratura.*

Uočimo dakle jednačinu

$$\frac{dy}{dx} + P(x, \alpha)\, y + Q(x, \alpha) = 0, \tag{10}$$

gdje su P i Q dvije funkcije integracione promjenljive x i parametra α (rezultati, izvedeni za slučaj jednačina sa jednim parametrom, vrijediće očevidno i za ma koliki broj takvih parametara). Ńen je opći integral

[1] Sur les zèros et les infinis des integrales etc. Paris 1894.

$$y = e^{-\int_{a_0}^{x} P dx} \left[C - \int_{a_0}^{x} Q e^{\int_{a_0}^{x} P dx} dx \right]$$

gdje je a_0 ma kakva, proizvoljno uzeta vrijednost $x - a$, čijom se varijacijom, očevidno, mijeńa samo vrijednost integracione konstante C.

Pustimo da x teži jednoj izvjesnoj granici $x = a$ i neka je

$$\left.\begin{aligned} &(11) \qquad \lim e^{-\int_{a_0}^{x} P dx} = f(\alpha) \\ &(12) \qquad \lim \int_{a_0}^{x} Q e^{\int_{a_0}^{x} P dx} dx = \varphi(\alpha) \end{aligned}\right\} \text{ za } x = a$$

Integral y težiće granici

$$(13) \qquad f(\alpha)\,[C - \varphi(\alpha)]\,.$$

Može se desiti da funkcija

$$\int P dx$$

za $x = a_0$ bude ravna vrijednosti $+\infty$ ili $-\infty$. Tada se granica $y\,(a, C, \alpha)$ određuje ovako:

Neka je a_0 konačno i pretpostavimo da izraz

$$\int_{x_0}^{x} P\,(x, a)\, dx$$

za $x_0 = a_0$ ima vrijednost $\pm\infty$. Tada ako se stavi da je

$$(14) \qquad \int P\,(x, a)\, dx = \overline{\omega}\,(x, \alpha)$$

opći se integral može napisati u obliku

$$(15) \qquad y = e^{-\bar{\omega}(x,\alpha)}\left[C - \int_{\alpha_0}^{x} Q e^{\bar{\omega}(x,\alpha)}\, dx\right] = f(\alpha)\left[C - \varphi(\alpha)\right]$$

i funkcija $y, (a, C, \alpha)$ biće data obrascem

$$(16) \qquad y(a, C, \alpha) = e^{-\bar{\omega}(a,\alpha)}\left[C - \int_{a_0}^{a} Q e^{\bar{\omega}(x,\alpha)}\, dx\right]$$

Ako funkcija $\bar{\omega}(x, \alpha)$ i za $x = a$ teži granici $+\infty$ ili $-\infty$, funkcija $y(x, C, \alpha)$ teži nuli ili beskonačno velikoj granici. Ako pri tome određeni integral

$$(17) \qquad \int_{a_0}^{a} Q e^{\bar{\omega}(x,\alpha)}\, dx$$

ima konačnu vrijednost $\varphi(\alpha)$, proizvod

$$(18) \qquad y e^{\bar{\omega}(a,\alpha)}$$

imaće konačnu vrijednost i biće funkcija parametra α prikazana izrazom

$$(19) \qquad C - \varphi(\alpha).$$

Pretpostavimo, dakle, ma koji od ovih slučajeva i neka je $u(x)$ jedna, ma kakva funkcija $x - a$, a U maksimalna vrijednost, koju dobija moduo te funkcije kad x varira od a_0 do a. Pretpostavimo, za tim, da se funkcija $Q(x, \alpha)$ može napisati u obliku

$$(20) \qquad Q(x, \alpha) = F(u, \alpha)$$

gdje je F kakva funkcija promjenljive u, holomorfna za sve vrijednosti u, čiji je moduo manji od U, pa ma kakva bila vrijednost α u krugu vrijednosti toga parametra, koje se posmatraju. *Funkcija* $\varphi(\alpha)$ *može se tada razviti u beskonačan red* na ovaj način.

Po jednoj poznatoj teoremi funkcija F može se razviti u beskonačan red, uređen po stepenima promjenljive u i konvergentan za sve vrijednosti te promjenljive, čiji je moduo manji od U, tako da je

$$F(u, \alpha) = \sum \psi(n, \alpha)\, u^n$$

Prema tome, a pošavši od obrasca

$$\varphi(\alpha) = \int_{a_0}^{a} Q(x, \alpha)\, e^{\bar{\omega}(x, \alpha)}\, dx \tag{21}$$

dobija se, da je

$$\varphi(\alpha) = \sum \left[\psi(n, \alpha) \int_{a_0}^{a} u^n\, e^{\bar{\omega}(x, \alpha)}\, dx \right]$$

Određeni integral

$$J = \int_{a_0}^{a} u^n\, e^{\bar{\omega}(x, \alpha)}\, dx \tag{22}$$

biće izvjesna funkcija promjenljivih n i α; neka je za sve cijele i pozitivne vrijednosti n

$$J = \Theta(n, \alpha)$$

Funkcija $\varphi(\alpha)$ *tada će biti razvijena u red oblika*

$$\varphi(\alpha) = \sum \psi(n, \alpha)\, \Theta(n, \alpha) \tag{23}$$

kome još u svakome specijalnom slučaju valja ispitati oblast konvergencije.

Može se desiti, da je funkciju $Q(x, \alpha)$ nemogućno napisati u obliku (20), ali da je mogućno napisati

$$Q(x, \alpha) = F_1(u_1, \alpha) + F_2(u_2, \alpha) + \ldots\ldots + F_k(u_k, \alpha) \tag{24}$$

gdje su $u_1, u_2 \ldots u_k$ ma kakve funkcije $x - a$, a $F_1, F_2 \ldots F_k$ funkcije tih promjenljivih, holomorfne za sve njihove vrijednosti čiji su moduli manji od najvećih modula, koje $u_1, u_2 \ldots u_k$ mogu imati kad x varira od a_0 do a.

Tada se, prema gornjim razlozima, može napisati

$$F_1(u_1, \alpha) = \sum \psi_1(n, \alpha)\, u_1^n$$

$$F_2(u_2, \alpha) = \sum \psi_2(n, \alpha)\, u_2^n$$

— — — — — — — —

$$F_k(u_k, \alpha) = \sum \psi_k(n, \alpha)\, u_k^n$$

i prema tome će biti

$$(25)\quad \varphi(\alpha) = \sum \Big[\psi_1(n, \alpha)\, \Theta_1(n, \alpha) + \psi_2(n, \alpha)\, \Theta_2(n, \alpha) + \ldots \ldots + \psi_k(n, \alpha)\, \Theta_k(n, \alpha) \Big]$$

gdje je u opće

$$(26)\qquad \Theta_p(n, \alpha) = \int_{a_0}^{a} u_p^n\, e^{\bar{\omega}(x, \alpha)}\, dx$$

Na sličan se način, u izvjesnim općim slučajevima i *funkcija* $f(\alpha)$ *može razviti u beskonačan proizvod.* Jer, pošavši od obrasca

$$f(\alpha) = e^{-\int_{a_0}^{a} P(x, \alpha)\, dx},$$

ako se pretpostavi, da se $P(x, \alpha)$ može napisati u jednom od malo-pređašnih oblika, u kome smo napisali $Q(x, \alpha)$, n. pr. u obliku

$$P(x, \alpha) = \Phi(u, \alpha),$$

i ako je, kao i malo čas

$$\Phi(u, \alpha) = \sum \chi(n, \alpha)\, u^n$$

$$\int_{a_0}^{a} u^n\, dx = \bar{\omega}(n),$$

biće

$$f(\alpha) = \prod e^{-\bar{\omega}(n)\chi(n,\alpha)}$$

kome samo u svako specijalnom slučaju valja proučiti oblast konvergencije.

U velikome broju slučajeva tako dobijene funkcije $f(\alpha)$ i $\varphi(\alpha)$ biće nove, nesvodljive transcendente i ono što je ovdje od naročitoga interesa, jeste to, što su ove transcendente na taj način trojako definisane:

1. kao granice, kojima teži integral jedne diferencijalne jednačine, koja zavisi o jednom parametru, kad integraciona promjenljiva količina teži izvjesnoj određenoj granici;
2. pomoću određenih integrala;
3. pomoću beskonačnih redova ili proizvoda

A poznato je koliko to doprinosi poznavanju jedne transcendente, kad smo je u stanju definisati na više raznih načina.

Primjetimo i to, da u specijalnim slučajevima, kad $P(x,\alpha)$ ne zavisi o α, a funkcija

$$Q(x,\alpha) = F(u,\alpha)$$

može se napisati u obliku

$$\Phi(\alpha u)$$

gdje je $\Phi(\xi)$ kakva holomorfna funkcija promjenljive ξ za sve vrijednosti od ξ_0 do ξ_1, transcendenta $\varphi(\alpha)$ može se razviti u red uređen po stepenima od α, konvergentan u intervalu od

$$\alpha_0 = \frac{\xi_0}{u(\xi_0)} \quad \text{do} \quad \alpha_1 = \frac{\xi_1}{u(\xi_1)}.$$

Jer tada je za sve vrijednosti promjenljive ξ od ξ_0 do ξ_1

$$\Phi(\xi) = \sum \psi(n)\,\xi^n$$

t. j.

$$F(u,\alpha) = \sum \psi(n)\,\alpha^n u^n \tag{27}$$

pa dakle

$$\psi(n,\alpha) = \psi(n)\,\alpha^n$$

i prema tome

$$\varphi(\alpha) = \sum \Theta(n)\,\psi(n)\,\alpha^n \tag{28}$$

gdje je

$$(29) \qquad \Theta(n) = \int_{a_0}^{a} u^n \, e^{\bar{\omega}(x)} \, dx.$$

Navedimo nekoliko tipova transcendenata, dobijenih na taj način.

I. Neka je data diferencijalna jednačina

$$(30) \qquad \frac{dy}{dx} - 2axy + F(\alpha, e^{-bx^2}) = 0$$

gdje je $F(\alpha, u)$ kakva funkcija parametra α i izraza

$$u = e^{-bx^2}$$

holomorfna za sve vrijednosti u u intervalu od $u = 0$ do $u = 1$ i za vrijednosti α od α_0 do α_1; a i b su kakvi realni i pozitivni brojevi. Potražimo granicu, kojoj teži izraz ye^{ax^2} za $x = \infty$

Ovdje je

$$(31) \qquad \bar{\omega}(x, \alpha) = \int P dx = -ax^2$$

i ako je

$$(32) \qquad F(\alpha, u) = \sum \psi(n, \alpha) \, u^n$$

biće

$$(33) \qquad F(\alpha, e^{-bx^2}) = \sum \psi(n, \alpha) \, e^{-nbx^2}$$

Uzmimo da je a_0 (koje je proizvoljno i čijom se varijacijom samo mijeńa vrijednost integracione konstante) ravno nuli, pa će biti

$$(34) \qquad \Theta(n, \alpha) = \int_0^{\infty} u^n \, e^{\bar{\omega}(x, \alpha)} \, dx = \int_0^{\infty} e^{-(a + bn)x^2} \, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{a + bn}}$$

Prema tome je

$$(35) \qquad \varphi(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum \frac{\psi(n, \alpha)}{\sqrt{a + bn}}$$

$$f(\alpha) = 0$$

a izraz ye^{ax^2} za $x = \infty$ teži granici

$$C - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum \frac{\psi(n, \alpha)}{\sqrt{a + nb}} \tag{36}$$

i red će biti konvergentan za sve vrijednosti parametra α u intervalu od α_0 do α_1.

Tako u specijalnom slučaju, kad je diferencijalna jednačina oblika

$$\frac{dy}{dx} - 2axy + \frac{1}{1 - \alpha e^{-bx^2}} = 0$$

biće

$$F(\alpha, u) = \sum_0^\infty \alpha^n u^n$$

dakle je

$$\psi(n, \alpha) = \alpha^n$$

i prema tome izraz ye^{ax^2} za $x = \infty$ teži granici

$$C - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{\sqrt{a + bn}}$$

a red je konvergentan za sve vrijednosti parametra α, čiji je moduo manji od jedinice.

U slučaju kad je diferencijalna jednačina oblika

$$\frac{dy}{dx} - 2axy + e^{\alpha e^{-bx^2}} = 0 \tag{37}$$

biće

$$F(\alpha, u) = \sum_0^\infty \frac{\alpha^n u^n}{1.2.3..n}, \tag{38}$$

dakle je

$$\psi(n, \alpha) = \frac{\alpha^n}{1.2.3...n} \tag{39}$$

i prema tome granica izraza ye^{ax^2} biće

$$C - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{1.2.3..n\sqrt{a + bn}} \tag{40}$$

a red je konvergentan za sve mogućne vrijednosti parametra α.

II. Neka je data jednačina

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + F(\alpha, e^{-x}) = 0 \tag{41}$$

gdje je $F(\alpha, u)$ holomorfna funkcija promjenljive u za sve vrijednosti te promjenljive od $u = 0$ do $u = 1$ i za vrijednosti α od α_0 do α_1, a za koju su $u = 0$ i $u = 1$ prosti korijeni. Tada će biti:

Potražimo ugaone sačinioce asimtota integralne krive linije, t. j. granicu, kojoj teži količnik $\frac{y}{x}$ za $x = \infty$.

Stavimo da je

$$\Phi(\alpha, u) = \frac{F(\alpha, u)}{u} - F'(\alpha, 0)$$

pa će funkcija Φ biti holomorfna u istim granicama, u kojima i funkcija $F(\alpha, u)$. Odatle je

$$F(\alpha, u) = u\left[F'(\alpha, 0) + \Phi(\alpha, u)\right],$$

a pošto je $F(\alpha, 1) = 0$

to je $F'(\alpha, 0) = -\Phi(\alpha, 1)$, pa dakle

$$F(\alpha, u) = u\left[\Phi(\alpha, u) - \Phi(\alpha, 1)\right].$$

Primjetimo, da pošto je $u = 0$ prost korijen jednačine

$$F(\alpha, u) = 0,$$

to je $F'(\alpha, 0)$, pa dakle i $\Phi(\alpha, 1)$ različno od nule.

Ovdje je

$$\bar{\omega}(x, \alpha) = -\int \frac{dx}{x} = -\log x$$

i ako se funkcija $\Phi(\alpha, u)$ razvije u red, tako da je

$$\Phi(\alpha, u) = \sum \psi(n, \alpha)\, u^n \tag{42}$$

biće

$$F(\alpha, e^{-x}) = \sum \psi(n, \alpha)\, e^{-(n+1)x} - \Phi(\alpha, 1)\, e^{-x} \tag{43}$$

$$= -\sum \psi(n, \alpha)\left[e^{-x} - e^{-(n+1)x}\right]$$

*

Prema tome, ako se opći integral jednačine napiše u obliku

$$(44) \qquad y = e^{-\bar{\omega}(x,\alpha)}\left[C - \int_0^x F(\alpha, e^{-x})\, e^{\bar{\omega}(x,\alpha)}\, dx\right] =$$

$$= x\left[C + \sum \psi(n,\alpha) \int_0^x \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x}\, dx\right]$$

i ako se primjeti, da je prema poznatom integralnom obrascu

$$\int_\infty^x \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x}\, dx = \log(n+1),$$

nalazi se da su ugaoni sačinioci asimtota integralnih krivih prikazani općim obrascem

$$(45) \qquad \lambda = C + \sum \psi(n,\alpha) \log(n+1),$$

koji vrijedi za sve vrijednosti parametra α u oblasti konvergencije reda (42). Ugaoni sačinilac asimtota, smatran kao funkcija parametra α, javlja se dakle u jednom naročitom obliku beskonačnog reda, na koji se ne nailazi kod običnih, poznatih, transcendenata.

U specijalnom slučaju, kad data diferencijalna jednačina ima oblik

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \frac{\alpha e^{-x}}{1 - \alpha e^{-x}} - \frac{\alpha e^{-x}}{1-\alpha} = 0$$

biće

$$\Phi(\alpha, u) = \frac{\alpha}{1 - \alpha u} = \alpha \sum_0^\infty \alpha^n u^n$$

dakle

$$\psi(\alpha, n) = \alpha\alpha^n$$

i prema tome

$$\lambda = C + \alpha \sum_0^\infty \alpha^n \log(n+1)$$

koji obrazac vrijedi za sve vrijednosti parametra α, čiji je moduo manji od jedinice.

Ako je jednačina oblika

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + e^{\alpha e^{-x}} x - e^{\alpha - x} = 0$$

biće $$\Phi(\varkappa, u) = e^{\varkappa u} = \sum_0^\infty \frac{\varkappa^n u^n}{1.2.3\ldots n}$$

dakle $$\psi(u, \varkappa) = \frac{\varkappa^n}{1.2.3\ldots n}$$

i prema tome $$\lambda = C + \sum \frac{\log(n+1)}{1.2.3\ldots n} \varkappa^n$$

i ovaj obrazac vrijedi za sve moguće vrijednosti parametra $\varkappa$.

Primjetimo, da je u ovome što prethodi, pretpostavljano, da se funkcija $F(\varkappa, u)$ može razviti u Taylor-ov red, konvergentan za posmatrane vrijednosti promjenljivih $\varkappa$ i u. Ali i kad to nije moguće, u velikome broju općih slučajeva može se F razviti u red drugoga kakvog oblika, n pr. u trigonometrijski red, ili u opće u red uređen po kakvoj funkciji promjenljive u; i u tim se slučajevima, istim putem kao i malo čas, dolazi do naročitih oblika beskonačnih redova, u koji se mogu razviti transcendente dobijene na malopređašńi način. I kod tih transcendenata valja naročito istaći tu interesantnu stranu, što se kod ńih funkcije, što dolaze pod znakom $\sum$, dobijaju iz običnih, poznatih, transcendenata pomoću integracionih operacija.

Vratimo se opet općoj linearnoj diferencijalnoj jednačini prvoga reda

(46) $$\frac{dy}{dx} + P(x, \varkappa)\, y + Q(x, \varkappa) = 0$$

i zadržimo se na znatnom i generalnom slučaju, kad je funkcija $Q(x, \varkappa)$ kakva *racionalna* funkcija $F(u, \varkappa)$ druge jedne *ma kakve* funkcije $u(x)$, sa sačiniocima, koji zavise o parametru $\varkappa$. Pretpostavimo, da je ova funkcija $F(u, \varkappa)$ holomorfna funkcija promjenljive u za sve vrijednosti u, čiji je moduo mańi od najvećeg modula, koji ima funkcija $u(x)$ za vrijeme dok x varira od $x = a_0$ do $x = a$.

Ja ću pokazati, *da se transcendente, dobijene na malopređašnji način, mogu svesti na izvjesne tipove, pomoću čijih se kombinacija one sve mogu dobiti, tako, da se sve transcendente, što odgovaraju jednoj istoj funkciji $P(x, \alpha)$, $u(x)$ i jednoj vrijednosti $x = a$, a ma kakvoj racionalnoj funkciji F, linearno izražavaju pomoću jedne iste transcendente i nekoliko ńenih uzastopnih izvoda*[1].

Prije svega, funkcija $F(u, \alpha)$, prema onome, što je o ńoj kazano, može se razviti u red oblika

$$F(u, \alpha) = \sum_{0}^{\infty} \psi(n, \alpha)\, u^n \tag{47}$$

konvergentan za sve vrijednosti u, čiji je moduo mańi od najvećeg modula, koji ima funkcija $u(x)$ u intervalu od $x = a_0$ do $x = a$.

Prema jednoj poznatoj teoremi za razlagańe racionalnih funkcija u Maclaurinov red, opći sačinilac $\psi(n, \alpha)$ imaće oblik

$$\psi(n, \alpha) = P_1(n, \alpha)\, r_1^n + P_2(n, \alpha)\, r_2^n + \ldots + P_k(n, \alpha)\, r_k^n \tag{48}$$

gdje $r_1, r_2 \ldots r_k$ označuju korijene izvjesne algebarske jednačine

$$G(r) = 0; \tag{49}$$

$P_1, P_2 \ldots P_k$ označuju izvjesne polinome po n i to takve, da je u opće polinom P_i stepena $\lambda_i - 1$, gdje λ_i označuje infinitezimalni red korijena r_i jednačine (49) Algebarska jednačina (49), koja se u teoriji racionalnih funkcija naziva *jednačinom generatrisom* date funkcije $F(u, \alpha)$, postaje kad se u jednačini, koja se dobija stavivši da je imenilac u $F(u, \alpha)$ ravan nuli, izmijeni u sa $\frac{1}{r}$ i kad se po tom tako dobijena jednačina oslobodi imenioca, koji će biti izvjesan stepen r-a.

Prema tome, pošavši od obrasca (21)

$$\varphi(\alpha) = \int_{a_0}^{a} F(u, \alpha)\, e^{\bar{\omega}(x, \alpha)}\, dx$$

[1] Metoda razlagańa, kojom ću izvesti ovu teoremu, jeste ona, koju sam upotrebio u svome radu: „Metode za transformaciju beskonačnih redova u određene integrale“ (Glas LI. Kraļ. Srp. Akademije).

dobija se, da je

$$(50) \qquad \varphi(\alpha) = \int_{a_0}^{a} \left[\sum_{0}^{\infty} \psi(n, \alpha)\, u^n \right] e^{\bar{\omega}(x,\alpha)}\, dx = J =$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \left[P_1(n, \alpha)\, r_1^n \int_{a_0}^{a} u^n\, e^{\bar{\omega}(x,\alpha)}\, dx \right] + \ldots\ldots$$

$$+ \sum_{0}^{\infty} \left[P_k(n, \alpha)\, r_k^n \int_{a_0}^{a} u^n\, e^{\bar{\omega}(x,\alpha)}\, dx \right].$$

Stavimo da je

$$(50)' \qquad \int_{a_0}^{a} u^n\, e^{\bar{\omega}(x,\alpha)}\, dx = \gamma(n, \alpha),$$

pa uočimo prvi sabirak zbira (50), koji će biti oblika

$$(51) \qquad J_1 = \sum_{0}^{\infty} P_1(n, \alpha)\, \gamma(n, \alpha)\, r_1^n$$

Pošto je P_1 polinom $\lambda_1 - 1$-ov stepena po n, to se uvijek može napisati da je

$$(52) \qquad \begin{aligned} P_1(n, \alpha) = {} & A_0 + A_1 n + A_2 n(n-1) + \ldots + \\ & + A_{\lambda_1 - 1}\, n(n-1) \ldots (n - \lambda_1 + 2) \end{aligned}$$

gdje su A_i sačinioci, koji zavise samo o parametru α i koji se mogu izračunati na ovaj način: stavljajući u (52) uzastopce

$$n = 0, 1, 2, 3 \ldots \lambda_1 - 1$$

dobija se sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} & P_1(0, \alpha) = A_0 \\ & P_1(1, \alpha) = A_0 + A_1 \\ (53) \quad & P_1(2, \alpha) = A_0 + 2A_1 + 2A_2 \\ & - - - - - - - - - - \\ & P_1(\lambda_1 - 1, \alpha) = A_0 + (\lambda_1 - 1) A_1 + (\lambda_1 - 1)(\lambda_1 - 2) A_2 + \ldots \end{aligned}$$

iz kojih se lako izračunavaju sačinioci $A_1, A_2 \ldots A_{\lambda_1-1}$ pomoću vrijednosti

$$P_1(1,\alpha), \quad P_1(2,\alpha), \ldots P_{1(\lambda_1-1\,\alpha)}.$$

Zamislimo, dakle, te sačinioce izračunane; oni će biti izvjesne algebarske kombinacije onih funkcija, što eksplicitno dolaze u danoj diferencijalnoj jednačini i prema obrascu (51) biće

$$J_1 = A_0 \sum_0^\infty \chi(n,\alpha)\, r_1^n + A_1 \sum_0^\infty n\,\chi(n,\alpha)\, r_1^n +$$

$$(54) \qquad + A_2 \sum_0^\infty n(n-1)\,\chi(n,\alpha)\, r_1^n + \ldots\ldots +$$

$$+ A_{\lambda_1-1} \sum_0^\infty n(n-1)\ldots(n-\lambda_1+2)\,\chi(n,\alpha)\, r_1^n.$$

Razlikujmo sad ova dva slučaja.

Prvi slučaj: neka je vrijednost $\chi(0,\alpha)$ konačna i određena, zaviseći ili ne o α. Uočimo tada funkciju

$$(55) \qquad \Theta(r,\alpha) = \sum_0^\infty \chi(n,\alpha)\, r^n$$

i pretpostavimo da se svi korijeni $r_1, r_2 \ldots r_k$ jednačine generatrise (49) nalaze u krugu konvergencije reda (55). Tada će biti

$$(56) \quad \begin{aligned}
&\sum_0^\infty \chi(n,\alpha)\, r_1^n = \Theta(r_1,\alpha)\\
&\sum_0^\infty n\,\chi(n,\alpha)\, r_1^n = r_1 \frac{d}{dr_1}\Theta(r_1,\alpha)\\
&\sum_0^\infty n(n-1)\,\chi(n,\alpha)\, r_1^n = r_1^2 \frac{d^2}{dr_1^2}\Theta(r_1,\alpha)\\
&\text{— — — — — — — — — — — — —}\\
&\sum_0^\infty n(n-1)..(n-\lambda_2+2)\,\chi(n,\alpha)\, r_1^n = r_1^{\lambda_1-1} \frac{d^{\lambda_1-1}}{dr_1^{\lambda_1-1}}\Theta(r_1,\alpha)
\end{aligned}$$

i prema tome je

$$(57)\quad J_1 = A_0\,\Theta(r_1,\alpha) + A_1 r_1\,\Theta'(r_1,\alpha) + \ldots + A_{\lambda_1-1} r^{\lambda_1-1}\,\Theta^{(\lambda_1-1)}(r_1,\alpha)$$

gdje je, kratkoće radi, stavljeno da je

$$\frac{d^{(k)}}{dr_1^k}\,\Theta(r_1,\alpha) = \Theta^{(k)}(r_1,\alpha)$$

a sam integral J biće dat obrascem

$$(58)\quad J = J_1 + J_2 + \ldots + J_k$$

gdje se svaki posebni integral J_i odnosi na korijen r_i i ima oblik

$$(59)\quad J_i = M_0\,\Theta(r_i,\alpha) + M_1 r_i\,\Theta'(r_i,\alpha) + \ldots + M_h r_i^h\,\Theta^{(h)}(r_i,\alpha)$$

Drugi slučaj: Neka je količina $\chi(0,\alpha)$ beskonačna ili neodređena. Tada, ako je $F'(0,\alpha) \lessgtr 0$, prethodni rezultati nemaju smisla, pošto je prvi član reda (55) tada i sam beskonačan ili neodređen, ali, kao što će se viđeti iz ovoga, što sleduje, ako je

$$F(0,\alpha) = 0$$

oni vrijede i u tome slučaju.

Označimo sa μ red korijena $u = 0$ jednačine

$$F(u,\alpha) = 0$$

riješene po u; tada se može napisati da je

$$(60)\quad F(u,\alpha) = u^\mu F_1(u,\alpha),$$

gdje F_1 označuje izvjesnu racionalnu funkciju promjenljive u, koja nije ravna nuli za $u = 0$. Ako, kao što smo malo prije radili sa funkcijom F, razvijemo funkciju F_1 u red uređen po stepenima od u, tako da je

$$(61)\quad F_1(u,\alpha) = \sum_0^\infty \psi_1(n,\alpha)\,u^n$$

funkcija $\psi_1(n,\alpha)$ biće definisana obrascem

$$(62)\quad \psi_1(n,\alpha) = Q_1(n,\alpha)\,\rho_1^n + Q_2(n,\alpha)\,\rho_2^n + \ldots + Q_k(n,\alpha)\,\rho_k^n$$

u kome $Q_i(n, \alpha)$ i ρ_i imaju isto značeńe, koje i $P_i(n, \alpha)$ u obrascu (48). I ovdje bi, kao i malo prije, imali da je

$$(63) \quad \varphi(\alpha) = J = \int_{a_0}^{a} w^{\mu} F_1(u, \alpha)\, e^{\omega(x, \alpha)}\, dx = J_1 + J_2 + \ldots + J_k$$

gdje je u opće

$$(64) \quad J_i = \sum_{0}^{\infty} Q_i(n, \alpha)\, \rho_i^n \int_{a_0}^{a} w^{n+\mu}\, e^{\bar{\omega}(x, \alpha)}\, dx .$$

ili prema obrascu (50)'

$$(65) \quad J_i = \sum_{0}^{\infty} Q_i(n, \alpha)\, \chi(n + \mu)\, \rho_i^n$$

Prema tome, službu malopređašńe funkcije $\Theta(r, \alpha)$ ovdje čini funkcija

$$(66) \quad \Theta_{\mu}(r, \alpha) = \sum_{0}^{\infty} \chi(n + \mu, \alpha)\, r^n$$

koja se, u ostalom, i sama, pa ma kakvo bilo μ, svodi na zbir jednoga izvjesnog polinoma od $\frac{1}{r}$ i funkcije

$$(67) \quad \Theta_1(r, \alpha) = \sum_{0}^{\infty} \chi(n + 1, \alpha)\, r^n$$

pomnožene sa $r^{1-\mu}$, jer je identički

$$\sum_{0}^{\infty} \chi(n + 1, \alpha)\, r^n = \chi(1, \alpha) + \chi(2, \alpha)\, r + \ldots\ldots$$
$$+ \chi(\mu - 1, \alpha)\, r^{\mu-2} + r^{\mu-1} \sum_{0}^{\infty} \chi(n + \mu, \alpha)\, r^n$$

i prema tome

$$(68) \qquad \Theta_\mu(r,\alpha) = r^{1-\mu}\,\Theta_1(r,\alpha) - \left[\frac{\chi(1,\alpha)}{r^{\mu-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\chi(2,\alpha)}{r^{\mu-2}} + \ldots\ldots + \frac{\chi(\mu-1,\alpha)}{r}\right].$$

U oba ova slučaja funkcija $\Theta(r,\alpha)$, definisana obrascem (55), ili funkcija $\Theta_1(r,\alpha)$ definisana obrascem (67), jesu kao *prosti elementi* za transcendente $\varphi(\alpha)$, dobijene na ranije izloženi način; sve transcendente $\varphi(\alpha)$, što odgovaraju jednoj istoj funkciji $u(x)$ i $F(x,\alpha)$ i jednoj vrijednosti $x=a$, mogu se, dakle, linearno izraziti pomoću takve jedne funkcije i ńenih izvoda, *i taj prost elemenat ostaje isti, pa ma kakva bila racionalna funkcija* $F(u,\alpha)$, *što joj odgovara.*

Tako, za diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dy}{dx} - 2axy + F(\alpha, e^{-bx^2}) = 0$$

gdje je $F(\alpha,u)$ ma kakva racionalna funkcija promjenljive u, koja je takva, da su moduli korijena ńene jednačine generatrise $G(r)=0$ svi mańi od jedinice, *prosti elemenat za sve transcendente* $\varphi(\alpha)$, *što odgovaraju raznim racionalnim funkcijama* F *i vrijednosti* $x=\infty$, *jest transcendenta*

$$(69) \qquad \Theta_1(r,\alpha) = \sum_0^\infty \frac{r^n}{\sqrt{a+bn}}$$

Jer maksimalni moduo, koji funkcija $u = e^{-bx^2}$ može imati za vrijeme dok x varira od 0 do $+\infty$, jeste $u=1$ i funkcija $F(\alpha,u)$ izvjesno je holomorfna za sve vrijednosti u, čiji je moduo mańi od jedinice, pošto korijeni jednačine generatrise

$$G(r) = 0$$

čiji su moduli svi, po pretpostavci, mańi od jedinice, nijesu ništa drugo, do izvrnute vrijednosti korijena jednačine, koja se dobija, kad se stavi da je imenilac u F ravan nuli i koja daje one vrijednosti u, što čine funkciju F prekidnom. Sa druge strane, korijeni jednačine generatrise nalaze se svi u unutrašńosti kruga konvergencije Θ_1, pošto se elementarnim metodama nalazi da je poluprečnik toga kruga ravan jedinici.

Tako isto za diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + F(x, e^{-x}) = 0$$

gdje je F ma kakva racionalna funkcija promjenljive u, koja postaje ravna nuli za $u = 0$ i $u = 1$ (za ove korijene pretpostavićemo da su prosti) a koja je konačna za sve vrijednosti u između tih granica, *prostim elementom za sve transcendente* $\varphi(x)$, *što odgovaraju vrijednosti* $x = \infty$, *jeste transcendenta*

$$(70) \qquad \Theta(r, x) = \sum_{0}^{\infty} r^n \log(n+1)$$

Korijeni jednačine generatrise izvjesno će se nalaziti u krugu konvergencije ovoga beskonačnog reda, čiji je poluprečnik ravan jedinici. Ovo izlazi otuda, što su ti korijeni ravni izvrnutim vrijednostima onih količina, za koje funkcija F prestaje biti konačna. i od kojih se, po pretpostavci, ni jedna ne nalazi između 0 i 1.

Poznato je iz drugih teorija, od kolike je znatnosti za proučavanje pojedinih općenitijih tipova funkcija poznavanje njihovih prostih elemenata. Korist od poznavanja takvih elemenata redukcije sastoji se poglavito u računskim olakšicama, koje se imaju razlažući funkciju na njene proste elemente i u uprošćenu načina za ispitivanje analitičke prirode složenijih tipova funkcija. Takvim se razlaganjem funkcija oslobođava svake prividne komplikovanosti i svodi na ono, što je u njoj odista esencijalno i što je bitno karakteriše. Osim toga redukcija na proste elemente dovodi do toga, da se čitave grupe funkcija računaju da pripadaju jednome istom tipu funkcija, ako imaju iste proste elemente, tako, da je dovoljno razraditi teoriju funkcije, koja prikazuje taj elemenat, pa da time i teorija jedne velike grupe funkcija bude razrađena.

Primjetimo, da se određivanje transcendenata $\varphi(x)$ svodi:

1. Na izračunavanje korijena $r_1, r_2 \ldots r_k$ jednačine generatrise

$$G(r) = 0$$

a prema samom načinu postanka ove jednačine očevidno je da će korijeni r_i biti *algebarske* kombinacije onih funkcija parametra x. što eksplicitno dolaze u funkciji $F(u, x)$.

2. Na određivanje funkcije $\Theta(r, x)$, odnosno $\Theta_1(r, x)$, definisane obrascem (55), odnosno (67).

Ovi *elementi redukcije* $\Theta(r, \alpha)$, odnosno $\Theta_1(r, \alpha)$, mogu se katkad izraziti pomoću običnih, danas poznatih i ispitanih funkcija, kao što su: algebarske, eksponencijalne, logaritamske, eliptične i t. d. funkcije; u velikome broju slučajeva, to će, na protiv, biti *nove nesvodljive transcendente.* Problem, da se za jednu datu transcendentu raspozna, da li je nova, ili svodljiva na kombinacije drugih poznatih transcendenata, spada, kao što je poznato, u najteže probleme današnje matematičke analize.

Ja ću pokazati, kako se ovakva pitaña mogu po nekad rješavati za transcendente $\varphi(\alpha)$, dobijene na gore navedeni način. u izvjesnim općenitijim slučajevima.

Uočimo diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + F(u, \alpha) = 0$$

i pretpostavimo da sačinilac $P(x)$ ne zavisi o parametru α. Stavimo, da je

$$\int P(x)\,dx = \omega(x) + C$$

i pretpostavimo da je količnik određenih integrala

$$\lambda(n) = \frac{\int_{a_0}^{a} u^n \, e^{\omega(x)}\,dx}{\int_{a_0}^{a} u^m \, e^{\omega(x)}\,dx} \tag{71}$$

što odgovaraju istoj konstanti C a ma kakvim cijelim i pozitivnim vrijednostima m i n, racionalan broj. Tada:

I. *Da bi funkcija* $\varphi(\alpha)$ *mogla biti kakva algebarska kombinacija onih funkcija parametra* α, *što eksplicitno dolaze u datoj diferencijalnoj jednačini, potrebno je da imenilac racionalnog broja* λ, *kad* **n** *beskonačno raste a* **m** *ostaje stalno, ne sadrži beskonačno mnogo prostih činilaca.*

Teorema se može izvesti kao posljedica jedne poznate Eisensteinove teoreme o beskonačnim redovima, što prikazuju algebarske funkcije. Jer pošto je količnik (70) po pretpostavci racionalan broj za ma kakve vrijednosti m i n, to je

$$(72) \qquad \int_{a_0}^{a} u^n \, e^{\bar{\omega}(x)} \, dx = \varrho \, \lambda(n)$$

gdje je $\lambda(n)$ kakav racionalan broj a ϱ kakav racionalan ili iracionalan broj, ali nezavisan o indeksu n. Prema tome je na osnovu obrazaca (50)′ i (55)

$$(73) \qquad \Theta(x, \alpha) = \varrho \sum_{0}^{\infty} \lambda(n) x^n$$

Ali prema Eisensteinovoj teoremi za redove uređene po stepenima jedne promjenljive količine x, a sa racionalnim sačiniocima, da bi red (73) mogao prikazivati kakvu algebarsku funkciju promjenljive x. potrebno je da ili sačinioci

$$\lambda(0), \quad \lambda(1), \quad \lambda(2), \ldots\ldots$$

budu cijeli brojevi, ili da postoji takav jedan cio i konačan broj h, da su količine

$$\lambda(0), \quad \lambda(1)h, \quad \lambda(2)h^2, \ldots\ldots$$

cijeli brojevi. Drugim riječima, potrebno je da imenioci brojeva $\lambda(n)$ ne sadrže beskonačno mnogo prostih činilaca, kad indeks n beskonačno raste.

Sa druge strane, pošto su korijeni jednačine generatrise

$$G(r) = 0$$

algebarske kombinacije funkcija parametra α što eksplicitno dolaze u F, to da bi funkcija $\varphi(\alpha)$ bila algebarska kombinacija ovih funkcija, potrebno je da, prema obrascima (50), (55), (58) i (59), funkcija $\Theta(x, \alpha)$ bude algebarska funkcija promjenljive x, čime je gorńa teorema dokazana.

II *Da bi funkcija* $\varphi(\alpha)$ *mogla biti kakva kombinacija od izvjesnog konačnog broja algebarskih, eksponencijalnih, trigonometrijskih, logaritamskih i ciklometrijskih funkcija onih transcendenata, što eksplicitno dolaze u diferencijalnoj jednačini, potrebno je, da ako se sa* $\mu(n)$ *označi najveći prosti činilac, koji dolazi u imeniocu broja* $\lambda(n)$, *izraz*

$$\frac{\mu(n)}{n}$$

teži kakvoj konačnoj granici (koja može biti i ravna nuli), kad n *beskonačno raste.*

Teorema se izvodi kao posledica poznate teoreme Čebičeva[1] za Taylorove redove sa racionalnim sačiniocima, a koja se može iskazati na ovaj način: da bi kakav beskonačni red

$$\sum \lambda(n)\, x^n$$

gdje su sačinioci $\lambda(n)$ racionalni brojevi, mogao prikazivati kakvu funkciju, složenu na ma koji način od izvjesnoga konačnog broja algebarskih, eksponencijalnih, trigonometrijskih, logaritamskih i ciklometrijskih funkcija promjenljive x, potrebno je da najveći prosti činilac, što dolazi u imeniocu broja $\lambda(n)$, kad n beskonačno raste, ne bude beskonačno velika količina višega reda na spram n.

Pomoću teoreme I. može se u velikome broju slučajeva dokazati, da data transcendenta $\varphi(\alpha)$, dobijena na ranije izloženi način, nije svodljiva ni na kakve algebarske kombinacije onih funkcija parametra α, što eksplicitno dolaze u diferencijalnoj jednačini.

Pomoću teoreme II. može se često puta raspoznati, da je transcendenta $\varphi(\alpha)$ nesvodljiva na kombinacije pomenutih elementarnih transcendenata u konačnom broju.

Pretpostavimo sad, da količnik (71) nije za sve cijele i pozitivne vrijednosti m i n racionalan broj. Poznato je i empirički, a može se i dokazati[2] pomoću elementarnoga pravila za diferencijaleńe porednih funkcija i pomoću Leibnitzovoga obrasca za traženje viših izvoda, da kad god se kakva funkcija, složena na ma koji način od današńih elementarnih funkcija i sviju do danas ispitanih transcendenata razvije u beskonačan red, uređen po stepenima nezavisno promjenljive količine, u sačiniocu općega člana ili su izvršene samo racionalne operacije (sabiraće, oduzimaće, množeće, dijeleće, podizaće na stepen, koji je cio broj) sa n-om, ili je taj sačinilac racionalna funkcija izraza

$$a^n,\quad b^n,\quad c^n, \ldots\ldots$$

sa sačiniocima, u kojima su sa n-om izvršene samo racionalne operacije.

[1] Hermite: Cours à la Faculté des Sciences de Paris, 1891. p. 197.

[2] Na ovome ću se pitańu više zadržati u drugome jednom radu.

Ako su, dakle, u količniku (71) *izvršene kakve operacije sa promjenljivim* **m** *i* **n**, *različne od onih gore navedenih, za transcendentu* $\varphi(\alpha)$, *što odgovara takvom slučaju, može se tvrditi, da je nesvodljiva na kombinacije do danas ispitanih i u analizu uvedenih transcendenata.*

Tako, u slučaju diferencijalne jednačine

$$\frac{dy}{dx} - 2gxy + F(\alpha, e^{-bx^2}) = 0$$

a za $a = \infty$ količnik (71) biće

$$\lambda(n) = \sqrt{\frac{g + bm}{g + bn}};$$

u slučaju jednačine

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + F(\alpha, e^{-x}) = 0$$

taj će količnik za $a = \infty$ biti

$$\lambda(n) = \frac{\log(n+1)}{\log(m+1)}$$

U oba slučaja sa promjenljivim m i n izvršene su operacije, različne od onih gore navedenih i prema tome transcendente $\varphi(\alpha)$, što im odgovaraju, nesvodljive su na današnje transcendente.

Do sad smo pretpostavljali da je u diferencijalnoj jednačini

$$\frac{dy}{dx} + P(x, \alpha)y + Q(x, \alpha) = 0$$

funkcija Q kakva racionalna funkcija druge jedne ma kakve funkcije $u(x)$, sa sačiniocima što zavise o parametru α. Pretpostavimo sad, da je isti slučaj i sa funkcijom $P(x, \alpha)$, t j. da je i ona kakva racionalna funkcija $\Phi(v, \alpha)$ jedne, ma kakve funkcije $v(x)$, sa sačiniocima, koji su funkcije parametra α. Pretpostavimo za tim, da je ova funkcija $\Phi(v, \alpha)$ holomorfna funkcija promjenljive v za sve vrijednosti v, čiji je moduo mańi od najvećeg modula, koji ima funkcija $v(x)$ za vrijeme dok x varira od $x = a_0$ do $x = a$.

Tada se istim razlaganiem, kao i malo prije, uvjeravamo, da se i transcendente

$$f(\alpha) = e^{-\int_{a_0}^{a} P(x\ \alpha)\, dx}$$

mogu svesti na izvjesne tipove, pomoću čijih se kombinacija mogu dobiti sve takve transcendente, što odgovaraju jednoj istoj funkciji $v(x)$ i jednoj istoj vrijednosti a, a ma kakvoj racionalnoj funkciji Φ.

Jer tada se određeni integral

$$J = \int_{a_0}^{a} P(x, \alpha)\, dx$$

može napisati u obliku

$$J = J_1 + J_2 + \ldots J_k$$

gdje je u opće

$$J_i = N_0\, \Theta(r_i, \alpha) + N_1\, r_i\, \Theta'(r_i, \alpha) + \ldots + N_h\, r_i^h\, \Theta^{(h)}(r_i, \alpha)$$

$$\Theta^{(h)} = \frac{d^m \Theta}{dr_i^m}.$$

U ovome su obrascu količine r_i i N_k izvjesne algebarske kombinacije onih funkcija parametra α, što eksplicitno dolaze u diferencijalnoj jednačini, a $\Theta(r, \alpha)$ izvjesna funkcija, čiji oblik zavisi jedino o oblicima funkcije $v(x)$ i vrijednosti $x = a$, a nikako ne i o obliku racionalne funkcije Φ. Funkcija $f(\alpha)$ biće, dakle, proizvod izvjesnoga konačnog broja članova, koji su svi oblika

$$e^{N_h \Theta^{(h)}(r_i, \alpha)}$$

i o svodljivosti ove transcendente na kombinacije današńih ispitanih funkcija vrijedi sve ono, što je kazano za transcendente $\varphi(\alpha)$.

* * *

Već po ovome, što je dovdje kazano za linearne diferencijalne jednačine prvoga reda, može se ocijeniti, koliko je obilat izvor novih transcendenata, kad se ove definišu pomoću diferencijalnih jednačina prvoga reda sa jednim ili više promjenljivih parametara

i kad se dobijeni integral smatra kao funkcija ovih parametara. Samo proučavanje i nalaženje eksplicitnoga oblika ovih transcendenata zadaje u velikom broju slučajeva za danas nesavladljivih teškoća i može se izvršiti gotovo isključivo u onim, u ostalom dosta generalnim slučajevima, u kojima je mogućna eksplicitna integracija jednačine u konačnom obliku ili pomoću integracionih znakova $\int$, ili kad se jednačina pomoću kakvih transformacija može svesti na Riccati-evu jednačinu, ili kad u datoj jednačini

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0 \tag{74}$$

dolazi više parametara, ali tako, da se jednačina

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, a, b, c, \ldots) = 0 \tag{75}$$

dobijena iz (74) za kakve specijalne vrijednosti parametara

$$\beta = b, \quad \gamma = c, \ldots$$

identički svodi na jedan od tipova jednačina, koje se mogu na pomenuti način integraliti. Tada je mogućno imati eksplicitni izraz [bilo u konačnom obliku, bilo u obliku reda ili određenog integrala] transcendenata $\Theta(\alpha)$, koje se dobijaju kad u općem integralu jednačine (74) nezavisno promjenljiva količina x teži kakvoj određenoj granici, parametri $\beta, \gamma \ldots$ teže granicama $b, c, \ldots$ a integral se smatra kao funkcija parametra α.

Primjetimo, da se velik broj diferencijalnih jednačina prvoga reda, pomoću smjena promjenljivih i pomoću algebarskih transformacija, svodi na linearne diferencijalne jednačine prvoga reda i da se tada na ńih može primijeniti sve ono, što je kazano za integrale ovih jednačina, smatrane kao funkcije parametara.

Tako, ja sam dokazao[1], da se sve algebarske diferencijalne jednačine prvoga reda, za koje su svi integralni singulariteti nezavisni o integracionoj konstanti i čiji je rod po y i $\frac{dy}{dx}$ ravan nuli, pomoću izvjesne transformacije oblika

$$y = R(x, \alpha, \beta, \gamma \ldots Y)$$

[1] Sur les zéros et les infinis etc. Paris, 1894. p. 28.

gdje je Y nova nepoznata funkcija a R izvjesna racionalna funkcija promjenljive Y, svode na linearne jednačine oblika

$$\frac{dY}{dx} + P(x, \alpha, \beta, \gamma \ldots)\, Y + Q(x, \alpha, \beta, \gamma \ldots) = 0$$

gdje su P i Q algebarske funkcije sačinilaca od y i $\frac{dy}{dx}$ u datoj diferencijalnoj jednačini (74). Prema tome transcendenta $\Theta(\alpha)$, dobijena kad se u općem integralu pusti da x teži kakvoj određenoj granici a integral smatra kao funkcija jednoga od parametara, n. pr. α, *biće izvjesna algebarska kombinacija onih funkcija parametra* α, *što eksplicitno dolaze u jednačini i onih transcendenata* $\Theta(\alpha)$, *na koje smo naišli u teoriji linearne jednačine.*

A uvijek se neposredno, na samoj datoj jednačini, može raspoznati, da li su svi ńeni integralni singulariteti nezavisnị o integracionoj konstanti ili ne. Tako, ako se jednačina (74) napiše u obliku

$$\sum_{i=0}^{i=\mu} f_i(x, y, \alpha, \beta, \gamma \ldots) \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\mu - i} = 0$$

gdje su f_i polinomi po y, da bi jednačina pripadala kategoriji, o kojoj je riječ, potrebno je i ďovoļno, da za ńu budu zadovoļeni poznati Fuchs-ovi uslovi za stalnost kritičkih tačaka općega integrala i da osim toga stepen polinoma f_k za $k = 0, 1, 2, \ldots \mu$ ne bude veći od ńegovog indeksa k, a rod jednačine po y i $\frac{dy}{dx}$ da bude ravan nuli ili veći od jedinice[1].

Uočimo n. pr. slučaj, kad data jednačina pripada toj kategoriji i pored toga zadovoļava i ova dva uslova:

1. da je ńen stepen po izvodu $\frac{dy}{dx}$ neparan;

2. da su u ńoj sačinioci nepoznate funkcije i izvoda racionalne kombinacije funkcije e^{ax} [parametri $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ mogu dolaziti na kakav bilo način].

Tada, ako je rod jednačine veći od jedinice, jednačina se, kao što je pokazao g. Poincaré, može integraliti algebarskim putem i

[1] Ibid. pag. 26.

opći integral biće izvjesna algebarska kombinacija sačinilaca jednačine, pa dakle algebarske kombinacije funkcije e^{ax} i onih funkcija

$$\varphi_1(\alpha, \beta \ldots), \quad \varphi_2(\alpha, \beta \ldots), \quad \varphi_3(\alpha, \beta \ldots) \ldots\ldots$$

parametara, što eksplicitno u jednačini dolaze. I ako se u integralu x smatra za stalno, a jedan od parametara, n. pr. α, kao promjeńiv, *funkcija* $\Theta(\alpha)$, *tako dobijena, biće izvjesna algebarska kombinacija onih funkcija* $\varphi_i(\alpha)$ *parametra* α, *što dolaze u samoj jednačini.* U takvome slučaju integracija ne dovodi do transcendenata različnih od onih, koje su eksplicitno date sačiniocima jednačine.

Isti bismo slučaj imali, u ostalom, i kad je stepen μ paran, jer i tada vrijede gore pomenuti rezultati o integraciji jednačine, pretpostavivši, da je ńen rod ravan jedinici.

Pretpostavimo dakle, da je rod jednačine ravan nuli. Tada, ako je stepen jednačine po izvodu neparan, po jednoj Noether-ovoj teoremi mogućno je y i $\frac{dy}{dx}$ izraziti kao racionalne funkcije jednoga parametra λ, sa sačiniocima, koji će biti racionalne kombinacije samih sačinilaca date diferencijalne jednačine, a prema tome i racionalne kombinacije funkcije e^{ax}, tako da je n. pr.

$$y = R_1(u, \lambda), \qquad \frac{dy}{dx} = R_2(u, \lambda)$$

gdje su R_1 i R_2 izvjesne racionalne kombinacije promjenļivih $u = e^{ax}$ i λ, sa sačiniocima, koji su algebarske kombinacije funkcijâ $\varphi_i(\alpha)$.

Iz prve se jednačine dobija da je

$$\frac{dy}{dx} = au\frac{dR_1}{du} + \frac{dR_2}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dx}$$

i upoređenem sa drugom jednačinom nalazi se da λ zadovoļava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{R_2 - au\dfrac{dR_1}{du}}{\dfrac{dR_1}{d\lambda}} = R_3(u, \lambda)$$

gdje je R_3 izvjesna racionalna funkcija promjenļivih u i λ. Za ovu racionalnu funkciju ja sam dokazao, da se ona uvijek, kad su zadovoļeni gore navedeni uslovi, svodi na oblik

$$P(u)\lambda + Q(u)$$

gdje su P i Q izvjesne racionalne funkcije promjenljive u, sa sačiniocima, koji algebarski zavisi o funkcijama $\varphi_i(\alpha)$. Promjenljiva λ biće, dakle, integral linearne diferencijalne jednačine prvoga reda

$$\frac{d\lambda}{dx} = P(e^{ax})\,\lambda + Q(e^{ax}) \tag{76}$$

i transcendente $\Theta(\alpha)$, koje se dobijaju kad se u općem integralu date jednačine

$$F(e^{ax}, y, \frac{dy}{dx}, \alpha, \beta, \gamma \ldots) = 0 \tag{77}$$

smatra x za stalno, a parametar α kao promjenljiva količina, *svode se na algebarske kombinacije transcendenata* $f(\alpha)$ *i* $\varphi(\alpha)$, *što se odnose na jednačinu* (76) *a o kojima je bilo prije govora, i funkcijâ* $\varphi_i(\alpha)$, *što eksplicitno dolaze u jednačini* (77).

Izvjesni tipovi jednačina prvoga reda svode se na jednačine ovoga tipa. Tako, ako jedna jednačina zadovoljava uslove za stalnost integralnih kritičkih tačaka i ako su pri tom vrijednosti, koje poništavaju ńen opći integral, nezavisne o integracionoj konstanti, dovoljno je učiniti smjenu

$$y = \frac{1}{Y}, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{Y^2}\frac{dY}{dx}$$

gdje je Y nova nepoznata funkcija, pa da se jednačina svede na drugu jednu, za koju su svi integralni singulariteti nezavisni o integracionoj konstanti. A prije je kazano, kako se neposredno na datoj jednačini može raspoznati, da li ona zadovoljava uslove za stalnost integracionih kritičkih tačaka i vrijednosti nezavisno promjenljive količine, što poništavaju ńen opći integral.

Pretpostavimo sad, da za jednu datu diferencijalnu jednačinu (77) nijesu zadovoljeni uslovi za stalnost sviju integralnih singulariteta, ali da ona zadovoljava Fuchs-ove uslove za stalnost integralnih kritičkih tačaka. Razlikujmo tada ove slučajeve:

1. slučaj: neka je rod date jednačine

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \alpha, \beta \ldots .) = 0 \tag{78}$$

ravan nuli. Tada je opći integral jednačine algebarska funkcija ńenih sačinilaca i jedne funkcije $u(x)$, koja se dobija kao integral izvjesne Riccati-eve jednačine

$$\frac{du}{dx} + \psi_1 u^2 + \psi_2 u + \psi_3 = 0 \tag{79}$$

gdje su ψ_1, ψ_2, ψ_3 izvjesne algebarske funkcije sačinilaca jednačine (78). Prema tome i funkcija $\Theta(\alpha)$, koja se dobija smatrajući integral jednačine (78) kao funkciju parametra α, *biće algebarska kombinacija onih funkcija, koje se dobijaju smatrajući sačinioce jednačine* (78) *i opći integral Riccati-eve jednačine* (79) *kao funkcije toga parametra.*

Prve su funkcije već same po sebi date u eksplicitnom obliku; o obliku funkcije, koja se dobija smatrajući integral jednačine (79) kao funkciju parametra α, ne može se reći ništa općenitijega. izuzimajući slučaj, kad se za stalnu vrijednost, što se daje nezavisno promjenljivoj količini x, uzme $x = \infty$. A u tome slučaju zna se ovo.

Stavimo u jednačini (79)

$$y = \frac{u}{\psi_1}$$

pa će ova preći u

$$\frac{du}{dx} + u^2 + f_1 u + f_2 = 0$$

gdje je

$$f_1 = \psi_2 - \frac{\psi_1'}{\psi_1}, \qquad f_2 = \psi_1 \psi_3 .$$

Sačinioci f_1 i f_2 biće algebarske kombinacije onih funkcija parametra α, što eksplicitno dolaze u jednačini (78). Tada

1. Ako f_1 i f_2 za $x = \infty$ teže konačnim i od nule različnim granicama, tako da je

$$lim\ f_1 = \gamma_1(\alpha)$$
$$lim\ f_2 = \gamma_2(\alpha)$$

funkcija $\lambda(\alpha) = lim\, u(x)$ biće data jednim ili drugim od obrazaca

$$\lambda(\alpha) = -\frac{1}{2}\left[\gamma_1(\alpha) + \sqrt{\gamma_1(\alpha)^2 - 4\gamma_2(\alpha)}\right]$$

$$\lambda(\alpha) = -\frac{1}{2}\left[\gamma_1(\alpha) - \sqrt{\gamma_1(\alpha)^2 - 4\gamma_2(\alpha)}\right]$$

Ovo izlazi iz poznate teoreme o granicama, kojima teži integral Riccatieve jednačine, kad integraciona promjenljiva beskonačno raste.

2. Ako f_1 i f_2 ne teže obje konačnim granicama, ili ako teže, te su obje granice ravne nuli, funkcija je $\lambda(z)$ u prvome slučaju beskonačna, a u drugome se ne može uvijek odrediti. U specijalnijem slučaju, kad je Riccatieva jednačina (79) algebarska i po promjenljivoj x — što će biti ako je i data jednačina (78) algebarska po x — može se jednačina (79) napisati u obliku

$$\sum_{k=0}^{k=m} \gamma_k (y, x, z, \ldots) \left(\frac{dx}{dy}\right)^{m-k} = 0$$

i po tome obliku mogu se na nju promijeniti pravila za traženje asimtotnih vrijednosti integrala, koja sam izveo u jednome predašnjem radu[1].

2. slučaj: neka je rod jednačine (78) ravan jedinici. Prema poznatoj teoremi g. Poincaré-a opći integral jednačine biće izvjesna algebarska kombinacija nenih sačinilaca i funkcije

$$Sn \left[J(x) \right].$$

gdje je $J(x)$ izvjesan integral oblika

$$\int \Phi (x, z)\, dx$$

i gdje Φ označuje jednu algebarsku kombinaciju pomenutih sačinilaca.

Ako se promjenljivoj x da kakva specijalna vrijednost $x = a$ i integral smatra kao funkcija $\Theta(z)$ parametra z, integral

$$J(x) = \int_{a_0}^{a} \Phi (x, z)\, dx$$

biće i sam izvjesna funkcija $\chi(z)$ toga parametra, a funkcija

$$Sn \left[J(x) \right]$$

postaje

$$Sn \left[\chi(z) \right]$$

[1] Glas L. Kral. Srpske Akademije.

gdje još valja imati na umu, da i periode funkcije Sn mogu zavisiti o α. *Transcendente* $\Theta(\alpha)$ *biće, dakle, izvjesna algebarska kombinacija funkcija* $\varphi_i(\alpha)$, *dobijenih smatrajući sačinioce jednačine kao funkcije parametra* α, *i transcendente*

$$Sn\left[\chi(\alpha)\right]$$

gdje je

$$\chi(\alpha) = \int_{a_0}^{a} \Phi(x, \alpha)\, dx \tag{80}$$

O funkcijama $\chi(\alpha)$, dobijenim integracijom jedne funkcije, što sadrži promjenljiv parametar α, bilo je prije govora i pokazano je, kako se mnogobrojne transcendente mogu na taj način definisati. U slučaju n. pr. kad je $\Phi(x, \alpha)$ kakva racionalna kombinacija jedne funkcije $u(x)$, funkcija $\chi(\alpha)$ može se razložiti na proste činioce na prije pokazan način i vodeći računa o adicionoj teoremi za eliptičnu funkciju Sn, lako se uviđa *da se transcendenta* $\Theta(\alpha)$ *može izraziti pomoću izvjesne algebarske kombinacije funkcijâ* $\varphi_i(\alpha)$ *i transcendenata*

$$\begin{aligned} &Sn\left[A_0\,\Theta(r,\alpha)\right], \qquad Sn\left[A_1\,\Theta'(r,\alpha)\right], \\ &Sn\left[A_2\,\Theta''(r,\alpha)\right], \qquad Sn\left[A_3\,\Theta'''(r,\alpha)\right] \end{aligned} \tag{81}$$

— — — — — — — — — —

gdje su $A_0, A_1, A_2 \ldots$ i r izvjesne konstante a $\Theta(r, \alpha)$ jedan od prostih elemenata, definisanih prilikom govora o linearnoj jednačini prvoga reda.

Pomoću onoga, što je kazano o toj jednačini, lako je n. pr. obrazovati opće tipove diferencijalnih jednačina sa stalnim kritičkim tačkama, za koje će transcendenta $\Theta(\alpha)$ biti algebarska kombinacija funkcijâ $\varphi_i(\alpha)$ i transcendenata (81), gdje se javlja kao prosti elemenat $\Theta(r, \alpha)$ transcendenta

$$\Theta(r, \alpha) = \sum_{n=0}^{u=\infty} \frac{r^n}{\sqrt{a + bn}}$$

ili $$\Theta(r, z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} r^n \log(n+1) \quad \text{i t. d.}$$

na koje smo prije naišli.

U specijalnom slučaju, kad je

$$\Phi(x, \alpha) = x^{\alpha-1} e^x$$

i $a = \infty$, transcendenta $\Theta(\alpha)$ biće algebarska kombinacija funkcijâ $\varphi_i(\alpha)$ i transcendente

$$Sn\left[\Gamma(\alpha)\right] \quad \text{i t. d.}$$

3. slučaj: neka je rod jednačine (78) veći od jedinice. Prema g. Poincaré-jevoj teoremi jednačina se može tada integraliti pomoću čisto algebarskih operacija, tako, da će opći integral biti izvjesna algebarska funkcija sačinilaca jednačine. *Transcendenta* $\Theta(\alpha)$ *biće, dakle, algebarska kombinacija onih funkcija* $\varphi_i(\alpha)$, *koje dolaze eksplicitno u sačiniocima jednačine.*

* * *

Ovi se rezultati mogu generalisati i na druge, mnogo općenitije klase diferencijalnih jednačina prvoga reda sa promjenljivim parametrima. Tako g. Painlevé je pokazao, da se g. Poincaré-jevi elementi redukcije javljaju i onda, kad kritičke tačke općega integrala nijesu stalne, ali integral ima ograničen broj vrijednosti, kad integraciona promjenljiva količina obilazi oko takvih pokretnih kritičkih tačaka. Isti je matematičar dao i metode, po kojima se može na datoj jednačini raspoznati, da li ńen opći integral zadovoljava ovaj uslov ili ne. I kad se to dovede u vezu sa dovdje izloženim rezultatima, vidi se, da se oni mogu rasprostrti na veoma prostrane klase diferencijalnih jednačina prvoga reda i da elementi redukcije za transcendente, sa kojima smo imali posla u ovome radu, vrijede u isti mah kao elementi redukcije i za vrlo prostrane klase analitičkih transcendenata. U isto vrijeme ti rezultati ističu ono, što sam ponajviše i htio istaći u ovome radu, a to je: obilatost transcendenata definisanih pomoću jednačina prvoga reda sa promjenljivim parametrima i mogućnost ńihovog svođeńa na kombinacije izvjesnih, u ostalom, veoma mnogobrojnih transcendenata, do kojih bi bilo nemogućno doći, kad bi se integral smatrao kao funkcija integracione promjenljive količine.

Aperçu sur la nature des transcendantes définies par les équations différentielles du premier ordre contenant des paramètres variables.

PAR MICHEL PETROVITCH, PROFESSEUR À LA HAUTE ECOLE DE BELGRADE.

[Extrait d'un travail en serbe (croate), soumis à l'Academie des Sciences de Zagreb.]

On peut regarder les équations différentielles du premier ordre comme source des transcendantes de deux points de vue différents:

1° en considérant l'intégrale comme fonction de la variable d'intégration;

2° en la considérant comme fonction des paramètres variables, qui figurent dans l'équation.

Parmi ces transcendantes, engendrées d'une manière ou de l'autre, il y en a des classes étendues qui sont reductibles aux combinaisons des certaines entre elles et celles-ci jouent alors le rôle d'élément de reduction pour ces classes de transcendantes. C'est ainsi que toutes les fonctions simplement périodiques à un nombre fini de valeurs sont des combinaisons algébriques de la fonction e^{ax} et que toutes les fonctions doublement périodiques à un nombre fini de valeur s'expriment algébriquement en $sn(ax)$ etc.

Ces éléments de reduction, relatifs aux fonctions définies par les équations du premier ordre, sont-ils nombreux et variés? L'auteur donne un aperçu sur ce qu'on peut dire sur cette question, d'après quelques resultats récents, relatifs à l'intégration de l'équation du premier ordre. Les transcendantes, obtenues en considerant l'intégrale comme fonction de la variable d'intégration ne sont pas très variées et leurs éléments de reduction sont peu nombreux. Ces éléments ou bien coïncident avec les fonctions élémentaires, ou bien ne diffèrent essentiellement de ceux, qui figurent explicitement dans les coefficients de l'équation, ou bien s'en déduisent par des quadratures, ou bien coïncident avec ceux, qu'on obtient par l'intégration des certains types simples d'équations.

Mais il n'en est pas de même quand on donne à la variable d'intégration une valeur constante $x = a$ et que l'on considère l'intégrale générale comme fonction des paramètres variables figurant dans ses coefficients. Les transcendantes, qu'il est impossible d'obtenir par l'intégration des équations du premier ordre et même d'ordre supérieur, en se plaçant au premier point de vue, s'engendrent par les équations très simples, quand on considère l'intégrale comme fonction des paramètres.

C'est ainsi que la fonction $\Gamma(x)$, la transcendante de Fredholm, la fonction $Z(x)$ de M. Hermite, les fonctions modulaires etc. s'engendrent par des équations dans lesquelles, en fait de transcendantes, ne figurent explicitement que les fonctions exponentielles.

L'auteur met en évidence la variété des transcendantes engendrées de cette manière et donne quelques resultats généraux relatifs à leur nature.

Désignons ces transcendantes par $\lambda(x)$. Elles peuvent renfermer la constante d'intégration ou en être indépendantes. Dans le second cas $\lambda(x)$ est une combinaison algébrique des fonctions $\varphi_i(x)$, qui figurent explicitement dans l'équation considérée. C'est, donc, seulement dans le cas, où les fonctions $\lambda(x)$ renferment la constante d'intégration, qu'elles puissent différer des fonctions $\varphi_i(x)$ et représenter des nouvelles transcendantes.

L'étude des fonctions $\lambda(x)$, relatives à l'équation linéaire du premier ordre, qui est en même temps élément de reduction pour toutes les équations du premier ordre intégrables à l'aide de quadratures, montre que ces équations sont une riche source des transcendantes variées. On peut exprimer celles-ci à l'aide des séries ou des produits infinis, dont les termes s'obtiennent par des quadratures. Dans des cas généraux on peut décomposer ces fonctions en éléments simples, de manière, que les transcendantes $\lambda(x)$, correspondant à une classe étendue d'équations, s'expriment linéairement à l'aide d'une seule fonction $\Theta(x)$ et de ses derivées, la fonction $\Theta(x)$ restant la même pour toutes les équations d'une telle classe.

Ainsi, pour certaines classes d'équations le rôle d'élément simple joue la transcendante

$$\Theta(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sqrt{\frac{x^n}{a+bn}} ;$$

pour une autre classe c'est la transcendante

$$\Theta(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} x^n \log(n+1)$$

qui joue ce rôle etc.

Outre les simplifications qu'apporte dans les calculs cette manière de reduction, la décomposition en éléments simples présente l'avantage de mettre en évidence ce qui est essentiel et irreductible dans ces

fonctions $\lambda(\alpha)$. En même temps l'étude des fonctions $\lambda(\alpha)$, correspondant à toutes les équations d'une certaine classe, est ramenée à celle d'une seule fonction $\omega(\alpha)$, qui reste la même pour la classe entière d'équations. Ainsi p. ex. la question de reconnaître si les fonctions $\lambda(\alpha)$, correspondant à des cas donnés ne sont pas reductibles aux transcendantes élémentaires, ou plus généralement, aux transcendantes aujourd'hui connues, se trouve sensiblement simplifiée de cette manière.

Ces resultats se généralisent à d'autres types d'équations du premier ordre et en particulier à celles qui s'intégrent algébriquement ou à l'aide des quadratures. L'auteur cite des classes étendues d'équations, pour lesquelles les fonctions $\lambda(\alpha)$ correspondantes s'expriment algébriquement soit à l'aide des seules fonctions $\varphi_i(\alpha)$, qui figurent explicitement dans les coefficients de l'équation considérée; soit à l'aide des $\varphi_i(\alpha)$ et des fonctions $\lambda(\alpha)$, rencontrées précédemment; soit à l'aide des $\varphi_i(\alpha)$ et les fonctions $\lambda(\alpha)$ relatives à une équation de Riccati; soit, enfin, à l'aide des $\varphi_i(\alpha)$ et de la transcendante

$$sn\left[\lambda(\alpha)\right]$$

où la fonction $\lambda(\alpha)$ appartient aux types rencontrés dans l'étude de l'équation linéaire. Ainsi p. ex. il n'est pas difficile de former des équations assez générales, pour lesquelles la transcendante correspondante $\lambda(\alpha)$ s'exprime algébriqement à l'aide des $\varphi_i(\alpha)$ et de la transcendante

$$sn\left[\Gamma(\beta)\right]$$

ou bien

$$sn\left[Z(\beta)\right]$$

ou bien

$$sn\left[\omega(\beta)\right], \qquad sn\left[\omega'(\beta)\right], \qquad sn\left[\omega''(\beta)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

avec

$$\omega(\beta) = \sum_{0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{a + bn}}$$

ou bien

$$\omega(\beta) = \sum_{0}^{\infty} \beta^n log\ (n+1)$$

etc. et où β est elle-même une certaine combinaison algébrique des fonctions $\varphi_i(\alpha)$.

Relacije kod pravilnih poligona, krugu upisanih i opisanih.

Čitano u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 11. siječnja 1898.

II. DIO.

NAPISAO PROF. E. DOLEŽAL.

U raspravi „Relacije kod pravilnih poligona, krugu upisanih i opisanih“ u CXXVI. knjizi „Rada“ jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu 1896., p. 114—195 resp. 194, napomenuli smo pri koncu, da ćemo raspravu, u stanovitom smjeru dovršenu, nadopuniti daljnom radnjom u drugom smjeru; što evo izvršujemo.

I.

Izrazi jednadžaba za tangente promatranih pravilnih poligona jesu slijedeći:

$$\left.\begin{aligned} t_n &= \frac{k_n - 1}{2}\, s_n \\ t_{2n} &= \frac{k_{2n} - 1}{2}\, s_{2n} \\ t_{2n}^{2} &= \frac{k_{2n}^{2} - 1}{2}\, s_{2n}^{2} \\ &\vdots \\ t_{2n}^{m} &= \frac{k_{2n}^{m} - 1}{2}\, s_{2n}^{m} \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Ove se formule mogu na interesantni način preobraziti, uzevši u obzir izraze iz V. formula 7) gore napomenute radnje, gdje je dioni faktor k pomoćju visine izražen. Uvedemo li ove vrijednosti u sistem jednadžaba 1), slijedit će:

$$\left.\begin{aligned} t_n &= \frac{1}{2\,(1-h_n)}\, s_n \\ t_{2n} &= \frac{1}{2\,(1-h_{2n})}\, s_{2n} \\ t_{2n}^{2} &= \frac{1}{2\,(1-h_{2n}^{2})}\, s_{2n}^{2} \\ &\vdots \\ t_{2n}^{m} &= \frac{1}{2\,(1-h_{2n}^{m})}\, s_{2n}^{m} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Eliminiramo li u pojedinim jednadžbama predznačenog sistema visine $h_{2n}, h_{2n}^{2}, \ldots . h_{2n}^{m}$ i izrazimo ih visinom h, oslanjajući se na formule 36) u I-om poglavju, imat ćemo:

$$\left.\begin{aligned} t_n &= \frac{1}{2\,(1-h_n)}\, s_n \\ t_{2n} &= \frac{2^{1}}{2^{2}-h_n}\, s_{2n} \\ t_{2n}^{2} &= \frac{2}{2^{4}-h_n}\, s_{2n}^{2} \\ &\vdots \\ t_{2n}^{m} &= \frac{2^{2m-1}}{2^{2m}-h_n}\, s_{2n}^{m} \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

U ovako dobivenim izrazima možemo za stranice poligona $s_{2n}, s_{2n}^{2}, \ldots . s_{2n}^{m}$ uvesti vrijednosti, koje su u formulama 38—45) I-og poglavja navedene, i dobit ćemo niz novih zanimljivih formula, u kojima su stranice poligona $s_{2n}, s_{2n}^{2} \ldots . s_{2n}^{m}$ izražene jedino pomoću tangente prvog poligona. Nastaje:

$$\left.\begin{aligned} s_n &= \frac{2}{k-1}\, t = 2\,(1-h)\, t \\ s_{2n} &= \frac{\sqrt{k\,(2k-2)}}{k\,(k-1)}\, t = \frac{2^{2}\,h}{2}\, t_{2n} \\ s_{2n}^{2} &= \frac{\sqrt{k\,(9k-10)}}{4k\,(k-1)}\, t = \frac{2^{4}\,h}{2^{3}}\, t_{2n}^{2} \\ &\vdots \\ s_{2n}^{m} &= \frac{\sqrt{k\left[3\cdot 2^{2(m-1)}(7k-8)-(k-2)\right]}}{2^{2(m-1)}\,k\,(k-1)}\, t = \frac{2^{2m}\,h}{2^{2m-1}}\, t_{2n}^{m} \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Tangente svih poligona proizlaze kao funkcije tangente prvog i temeljnog poligona, za koje dobijemo:

$$\left.\begin{aligned} t_{2n} &= \frac{2\sqrt{k(2k-2)}}{k(k-1)}\,\frac{1}{2^2}\,h\,t \\ t_{2n}^{2} &= \frac{2\sqrt{k(9k-10)}}{k(k-1)}\,\frac{1}{2^4}\,h\,t \\ &\vdots \\ t_{2n}^{m} &= \frac{2\sqrt{\frac{k}{3}\left[2^{2(m-1)}(7k-8)-(k-2)\right]}}{k(k-1)}\,\frac{1}{2^{2m}}\,h\,t \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

U daljnoj uporabi formula I. 38—45) prikazuju se tangente sviju poligona kao funkcije polumjera kruga ϱ, kojemu su oni upisani, kako je po sebi razumljivo; samo što ovdje izlaze faktori, koji sadržavaju dioni faktor k i visinu h samo prvoga poligona, naime:

$$\left.\begin{aligned} t_{2n} &= \frac{2\sqrt{(k-2)(2k-2)}}{k-1}\,\frac{1}{2^2}\,h\,\varrho \\ t_{2n}^{2} &= \frac{2\sqrt{(k-2)(9k-10)}}{k-1}\,\frac{1}{2^4}\,h\,\varrho \\ &\vdots \\ t_{2n}^{m} &= \frac{2\sqrt{\frac{k-2}{3}\left[2^{2(m-1)}(7k-8)-(k-2)\right]}}{k-1}\,\frac{1}{2^{2m}}\,h\,\varrho \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

Izrazimo li tangente kao funkcije poligonalne strane s, dobijemo izraze:

$$\left.\begin{aligned} t_{2n} &= \frac{\sqrt{k(2k-2)}}{k.}\,\frac{1}{2^2}\,h\,s \\ t_{2n}^{2} &= \frac{\sqrt{(k-2)(9k-10)}}{k.}\,\frac{1}{2^4}\,h\,s \\ t_{2n}^{3} &= \frac{\sqrt{k(37k-42)}}{k.}\,\frac{1}{2^6}\,h\,s \\ &\vdots \\ t_{2n}^{m} &= \frac{\sqrt{\frac{k}{3}\left[2^{2(m-1)}(7k-8)-(k-2)\right]}}{k.}\,\frac{1}{2^{2m}}\,h\,s \end{aligned}\right\} \quad 7)$$

Do sada razvite formule 4—7) dozvoljavaju brzo zbrajanje sviju poligonalnih strana, kao i tangenta s druge strane.

Iz formule 4) izlazi:

$$\sum_{m=0}^{m} s_{2^m n} = \frac{t}{k\,(k-1)} \sum_{m=0}^{m} \frac{\sqrt{\frac{k}{3}\left[2^{2(m-1)}\,(7k-8) - (k-2)\right]}}{2^{2(m-1)}}; \quad 8)$$

dalje iz formule 5) bit će zbroj tangenata:

$$\sum_{m=0}^{m} t_{2^m n} = \frac{2t}{k\,(k-1)} \sum_{m=0}^{m} \frac{\sqrt{\frac{k}{3}\left[2^{2(m-1)}\,(7k-8) - (k-2)\right]}}{2^{2m}\,h} \quad 9)$$

ili iz formule 6), koja izražava zbroj kao funkciju polumjera:

$$\sum_{m=0}^{m} t_{2^m n} = \frac{2\rho}{k-1} \sum_{m=0}^{m} \frac{\sqrt{\frac{k-2}{3}\left[2^{2(m-1)}\,(7k-8) - (k-2)\right]}}{2^{2m}\,h} \quad 10)$$

i napokon daje formula 7):

$$\sum_{m=0}^{m} t_{2^m n} = \frac{s}{k} \sum_{m=0}^{m} \frac{\sqrt{\frac{k}{3}\left[2^{2(m-1)}\,(7k-8) - (k-2)\right]}}{2^{2m}\,h} \quad 11)$$

Kad bismo u jednadžbama 1—11) supstituirali za h vrijednost iz I. formule 10), mogli bismo ove izraze drugačije preobraziti, što mi izvesti ne ćemo, nego ćemo to jedino označiti.

Za trigonometrijske funkcije dobit ćemo daljne interesantne relacije; i to za kosinuse centričnih kutova promatranih poligona izlazi po IV. formula 1):

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{180}{n} &= \frac{r_n}{\rho} = \frac{\rho}{R_n} = \frac{s_n}{2t_n} \\
\cos\frac{180}{2n} &= \frac{r_{2n}}{\rho} = \frac{\rho}{R_{2n}} = \frac{s_{2n}}{2t_{2n}} \\
\cos\frac{180}{2^2 n} &= \frac{r_{2^2 n}}{\rho} = \frac{\rho}{R_{2^2 n}} = \frac{s_{2n}^2}{2t_n^2} \\
&\vdots \\
\cos\frac{180}{2^m n} &= \frac{r_{2^m n}}{\rho} = \frac{\rho}{R_{2^m n}} = \frac{s_{2^m n}}{2t_{2^m n}}
\end{aligned}\right\} \quad 12)$$

Uvedemo li u gornjim formulama $\rho = 1$, dobit ćemo:

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{180}{n} &= \frac{1}{R_n} = r_n \\ \cos\frac{180}{2n} &= \frac{1}{R_{2n}} = r_{2n} \\ \cos\frac{180}{2^2 n} &= \frac{1}{R_{2^2 n}} = r_{2^2 n} \\ &\vdots \\ \cos\frac{180}{2^m n} &= \frac{1}{R_{2^m n}} = r_{2^m n} \end{aligned}\right\} \qquad 13)$$

Ove jednadžbe dozvoljavaju sastavbu ovoga zbroja:

$$\sum_{m=0}^{m} \cos\frac{180}{2^m n} = \sum_{m=0}^{m} r_{2^m n} = \sum_{m=0}^{m} \frac{1}{R_{2^m n}} \qquad 14)$$

Mi ćemo nastojati ovaj zbroj drugačije izraziti, što ćemo time postići, da ostavljajući $\rho = 1$, iz sistema 11) oduzmemo one jednadžbe, u kojima se kosinusi kao funkcije od k pokazuju, a ove pomoću visinâ preobrazimo.

Dobit ćemo:

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{180}{n} &= 1 - h_n \\ \cos\frac{180}{2n} &= 1 - h_n = \frac{2^2 - h_n}{2^2} = 1 - \frac{h_n}{2^2} \\ \cos\frac{180}{2^2 n} &= 1 - h_{2^2 n} = \frac{2^4 - h_n}{2^4} = 1 - \frac{h_n}{2^4} \\ &\vdots \\ \cos\frac{180}{2^m n} &= 1 - h_{2^m n} = \frac{2^{2m} - h_n}{2^{2m}} = 1 - \frac{h_m}{2^{2m}} \end{aligned}\right\} \qquad 15)$$

Učinimo li zbroj, imat ćemo:

$$\sum_{m=0}^{m} \cos \frac{180}{2^m n} = m - h \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right)$$

ili

$$= m - h \frac{2^{2m} - 1}{3 \cdot 2^{2(m-1)}} \qquad 16)$$

Za formulu 14) dobit ćemo takodjer relaciju:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{m} r_{2^m n}^{m} = m - h \frac{2^{2m} - 1}{3 \cdot 2^{2(m-1)}} \\ &\text{kao i} \\ &\sum_{m=0}^{m} R_{2^m n}^{m} = \sum \sec \frac{180}{2^m n} = \frac{3 \cdot 2^{2(m-1)}}{3 \cdot 2^{2(m-1)} m - (2^{2m} - 1) h} \end{aligned}\right\} \quad 17)$$

Uvedemo li u sistemu jednačaba 15) za visinu njihovu vrijednost iz I. jednadžbe 10), naime:

$$h = \frac{k-2}{k-1},$$

i preobrazimo li supstitucijom dobivene izraze na zgodan način, izaći će:

$$\left.\begin{aligned} \cos \frac{180}{n} &= \frac{1}{k-1} \\ \cos \frac{180}{2n} &= \frac{3k-2}{2^2 (k-1)} \\ \cos \frac{180}{2^2 n} &= \frac{15k-14}{2^4 (k-1)} \\ &\vdots \\ \cos \frac{180}{2^m n} &= \frac{(2^{2m} - 1) k - 2 (2^{2m-1} - 1)}{2^{2m} (k-1)} \end{aligned}\right\} \quad 18)$$

Učinimo li zbroj kosinusa:

$$\sum_{m=0}^{m} \cos \frac{180}{2^m n} = \frac{1}{k-1}\left[1 + \frac{3k-2}{2^2} + \frac{15k-14}{2^4} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{(2^{2m}-1)\,k - (2^{2m-1}-1)\,2}{2^{2m}}\right],$$

što se dade pisati u obliku:

$$\sum_{m=0}^{m} \cos \frac{180}{2^m n} = \frac{1}{k-1}\left[1 + \frac{(2^2-1)\,k-(2-1)\,2}{2^2}\right.$$

$$+ \frac{(2^4-1)\,k-(2^3-1)\,2}{2^4} + \frac{(2^6-1)\,k-(2^5-1)\,2}{2^6}$$

$$\left. + \frac{(2^8-1)\,k-(2^7-1)\,2}{2^8} + \ldots + \frac{(2^{2m}-1)\,k-(2^{2m-1}-1)\,2}{2^{2m}}\right]$$

Ako se izraz u uglastoj zavorci svede na zajednički nazivnik i poreda, nastat će:

$$\sum_{m=0}^{m} \cos \frac{180}{2^m n} = \frac{1}{2^{2m}(k-1)}\left[\begin{array}{l} + 2\,(2^{2m-2}-1)\,k-(2^{2m-3}-1)\,2\;2^{2m-2} \\ + 2\,(2^{2m-4}-1)\,k-(2^{2m-5}-1)\,2\,.\,2^{2m-4} \\ + 2\,(2^{2m-6}-1)\,k-(2^{2m-7}-1)\,2\,.\,2^{2m-6} \\ \vdots \\ + 2^0\,(2^{2m}-1)\,k-(2^{2m-1}-1)\,2\,.\,2^0 \end{array}\right]$$

što dalje daje:

$$\sum_{m=0}^{m} \cos \frac{180}{2^m n} = \frac{1}{2^{2m}(k-1)}\left[k\,\frac{3m-1}{3}\,2^{2m} + \frac{5-3m}{3}\,2^{2m} + \frac{k-2}{3}\right]$$

ili:
$$= \frac{1}{k-1}\left[\frac{3m-1}{3}\,k + \frac{5-3m}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{k-2}{2^{2m}}\right] \quad 19)$$

Na temelju jednadžbe 14) odnosno 17) postoje relacije:

*

$$\left.\begin{aligned} \sum_{m=0}^{m} r_{2^m n} &= \sum_{m=0}^{m} \cos \frac{180}{2^m n} = \frac{1}{k-1} \\ \left[\frac{3m-1}{3} k + \frac{5-3m}{3} + \frac{1}{3 . 2^{2m}} (k-2)\right] & \\ \sum_{m=0}^{m} R_{2^m} &= \sum_{m=0}^{m} \sec \frac{180}{2^m n} = (k-1) \\ \frac{1}{\frac{3m-1}{3} k + \frac{5-3m}{3} + \frac{1}{3 . 2^{2m}} (k-2)} & \end{aligned}\right\} \quad 20)$$

U IV. jednadžbi 4) imali smo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{r_n}{R_n} &= \cos^2 \frac{180}{n} = \frac{1}{(k_n - 1)^2} \\ \frac{r_{2n}}{R_{2n}} &= \cos^2 \frac{180}{2n} = \frac{1}{(k_{2n} - 1)^2} \\ \frac{P}{R_{2n}^2} &= \cos^2 \frac{180}{2^2 n} = \frac{1}{(k_{2^2 n}^2 - 1)^2} \\ \vdots & \\ \frac{r_{2^m n}}{R_{2^m n}} &= \cos^2 \frac{180}{2^m n} = \frac{1}{(k_{2^m n}^m - 1)^2} \end{aligned}\right\} \quad 21)$$

za te možemo na temelju formule 7) i 17) u poglavju V. pisati:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 \frac{180}{n} &= \frac{r_n}{R_n} = \frac{1}{(k-1)^2} = (1-h)^2 = 1 - 2h + h^2 \\ \cos^2 \frac{180}{2n} &= \frac{r_{2n}}{R_{2n}} = \frac{1}{(k_n - 1)^2} = (1 - h_{2n})^2 = 1 - 2\frac{h}{4} + \frac{h^2}{4^2} \\ \cos^2 \frac{180}{2^2 n} &= \frac{r_{2^2 n}}{R_{2^2 n}} = \frac{1}{(k_{2^2 n}^2 - 1)^2} = (1 - h_{2^2 n}^2)^2 = 1 - 2\frac{h}{4^2} + \frac{h^2}{4^4} \\ \vdots & \\ \cos^2 \frac{180}{2^m n} &= \frac{r_{2^m n}}{R_{2^m n}} = \frac{1}{(k_{2^m n}^m - 1)^2} = (1 - h_{2^m n}^m)^2 = 1 - 2\frac{h}{4^m} + \frac{h^2}{4^{2m}} \end{aligned}\right\} \quad 22)$$

Zbroj kvadrata daje:

$$\sum_{m=0}^{m} \cos^2 \frac{180}{2^m n} = m - 2h \left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots \frac{1}{4^m} \right] + h^2 \left[1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^4} + \dots \frac{1}{4^{2m}} \right]$$

ili:

$$\sum_{m=0}^{m} \cos^2 \frac{180}{2^m n} = m - \frac{1}{3} h \frac{4^m - 1}{2^{2m-3}} + \frac{1}{15} \frac{4^{2m} - 1}{4^{2(m-1)}} h^2 \qquad 23)$$

Kako se lako opazi, daju česnici:

$$\left.\begin{aligned} \frac{4^m - 1}{3} &= a \\ \frac{4^{2m} - 1}{15} &= b \end{aligned}\right\}$$

cijele brojeve, tako da se može jednadžba 23) pisati:

$$\sum_{m=0}^{m} \cos^2 \frac{180}{2^m n} = c = m - \frac{a}{2^{2m-3}} h + \frac{b}{4^{2(m-1)}} h^2 \qquad 24)$$

Ova je jednadžba s obzirom na h četvorna; ona bi se lako na obični način riješiti dala, kad bi nam koeficijenti od h, kao m i c zadani bili.

Riješenje jednadžbe dade se lako dokazati u slučaju, kad bi c i koeficijenti od h i h^2, to jest:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{2^{2m-3}} &= \alpha \\ \frac{b}{4^{2(m-1)}} &= \beta \end{aligned}\right\}$$

za kakav konkretni sistem poligona poznati bili; pošto se iz koeficijenata α i β dade izračunati m, a uz to se pruža još lijepa kontrola.

Imamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{4^m - 1}{3 \cdot 2^{2m-3}} &= \alpha \\ \frac{4^{2m} - 1}{15 \cdot 2^{2(m-1)}} &= \beta \end{aligned}\right\} \qquad 25)$$

Prva od obiju jednadžaba daje riješenjem s obzirom na m:

$$m = \frac{log \frac{2}{2^3 - 3\alpha}}{2 \, log \, 2} \qquad 26)$$

Druga jednadžba sistema 25) daje za eksponenat na analogni način:

$$m = \frac{log \frac{4^2}{4^2 - 15\beta}}{2^2 \, log \, 2} \qquad 27)$$

Pošto su dobivene vrijednosti za m iz 26) i 27) medjusobno jednake, postoji relacija:

$$2 \, log \frac{2}{2^3 - 3\alpha} = log \frac{4^2}{4^2 - 15\beta},$$

koja se može pisati:

$$4\alpha - 5\beta = \frac{16}{3}, \qquad 28)$$

a iz koje se takodjer može dobiti:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{5}{4}\beta + \frac{3}{4} \\ \beta &= \frac{4}{5}\alpha - \frac{16}{15} \end{aligned}\right\} \qquad 29)$$

Za opredjeljivanje visine h imademo iz 3) jednadžbu:

$$\beta h^2 - \alpha h = c - m, \qquad 30)$$

a i visina h dobit će ovaj oblik:

$$h = \frac{1}{2\beta}\left[\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta(c-m)}\right] \qquad 31)$$

Ona je u opće, dokle postoje vrijednosti:

$$\alpha^2 + 4\beta c > 4\beta m, \text{ resp. } c > m - \frac{\alpha^2}{4\beta},$$

u stanju primiti dvije realne vrijednosti; ona će pak dobiti dvije jednake vrijednosti, kad bude:

$$\alpha^2 + 4\beta c = 4\beta m, \text{ t. j. } c = m - \frac{\alpha^2}{4\beta}.$$

Sad smo već u stanju za zbroj kvadrata sinusa jednostavna izraze izvesti.

Uvedemo li u formulu 23) sinus, onda možemo pisati:

$$\sum_{m=0}^{m} sin^2 \frac{180}{2^m n} = m - \frac{1}{3} h \frac{4^m - 1}{2^{2m-3}} + \frac{1}{15} h^2 \frac{4^{2m} - 1}{4^{2(m-1)}} \qquad 32)$$

Izvedemo li na desnoj strani jednadžbe zbroj, dobit ćemo:

$$m - \sum_{m=0}^{m} sin^2 \frac{180}{2^m n} = m - \frac{1}{3} h \frac{4^m - 1}{2^{2m-3}} + \frac{1}{15} h^2 \frac{4^{2m} - 1}{4^{2(m-1)}}$$

ili za zbroj kvadrata sinusâ:

$$\sum_{m=0}^{m} sin^2 \frac{180}{2^m n} = \frac{1}{3} h \frac{4^m - 1}{4^{2m-3}} - \frac{1}{15} h^2 \frac{4^{2m} - 1}{4^{2(m-1)}} \qquad 33)$$

I ova jednadžba prikazuje s obzirom na h četvornu jednadžbu, koja će, uvedemo li simbole α, β, j, kao u jednadžbi 24), primiti oblik:

$$\beta h^2 - \alpha h + j = 0, \qquad 34)$$

iz koje slijedi:

$$h = \frac{1}{2\beta} \left[\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta j} \right] \qquad 35)$$

Pošto h može samo realne vrijednosti primiti, mora izraz pod korijenom imati vrijednosti:

$$\alpha^2 - 4\beta j \geqq 0$$

Pošto su za kvadrate kosinusâ i sinusâ od $\frac{180}{2^m n}$ zbrojevi bili izvedeni, nastojat ćemo, da i za kvadrate tangentâ postavimo neke izraze.

Po I. formuli 5) imademo:

$$tg^2 \frac{180}{n} = k\,(k-2), \qquad 36)$$

tako da će se zbroj neposredno slijedećih kvadrata tangentâ zvati:

$$\sum_{m=0}^{m} tg^2 \frac{180}{2^m n} = \sum_{m=0}^{m} k_{2n}^{m}\,(k_{2n}^{m} - 2) \qquad 37)$$

Sad je pak po V. formula 8) odnosno 17):

$$k_{2n}^{m} - 2 = \frac{h_{2n}^{m}}{1 - h_{2n}^{m}}$$

resp.

$$k_{2n}^{m} = 2 + \frac{h}{4^m} + \frac{h^2}{4^{2m}} + \ldots = \frac{2^{2m+1} h}{2^{2m} - h} \qquad 38)$$

a možemo za pojedine kvadrate umetnuti:

$$\left.\begin{aligned} tg^2 \frac{180}{n} &= \frac{2 \quad h}{2^0 - h}\,\frac{h}{1-h} \\ tg^2 \frac{180}{2n} &= \frac{2^2 - h}{2^2 - h}\,\frac{h_{2n}}{1 - h_{2n}} \\ tg^2 \frac{180}{2^2 n} &= \frac{2^3 - h}{2^4 - h}\,\frac{h_{2n}^2}{1 - h_{2n}^2} \\ &\vdots \\ tg^2 \frac{180}{2^m n} &= \frac{2^{2m+1} h}{2^{2m} - h}\,\frac{h_{2n}^{m}}{1 - h_{2n}^{m}} \end{aligned}\right\} \qquad 39)$$

Izrazimo li u drugim faktorima na desnoj strani neposredno slijedeće visine pomoću jednadžbe 16) poglavlja V. visinom prvog poligona h, dobijemo prije svega:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{h_{2n}}{1-h_{2n}} &= \frac{h_n}{4\left(1-\frac{h_n}{4}\right)} = \frac{h}{2^2-h}\\
\frac{h_{2n}^2}{1-h_{2n}^2} &= \frac{h}{4^2\left(1-\frac{h}{4^2}\right)} = \frac{h}{2^4-h}\\
\frac{h_{2n}^3}{1-h_{2n}^3} &= \frac{h}{4^3\left(1-\frac{h}{4^3}\right)} = \frac{h}{2^6-h}\\
&\vdots\\
\frac{h_{2n}^m}{1-h_{2n}^m} &= \frac{h}{4^m\left(1-\frac{h}{4^m}\right)} = \frac{h}{2^{2m}-h}
\end{aligned}\right\} \quad 40)$$

Supstituiramo li to u 39), imat ćemo:

$$\left.\begin{aligned}
tg^2\frac{180}{n} &= \frac{2-h}{2^0-h}\,\frac{h}{2^2-h}\\
tg^2\frac{180}{2n} &= \frac{2^3-h}{2^2-h}\,\frac{h}{2^4-h}\\
tg^2\frac{180}{2^2n} &= \frac{2^5-h}{2^4-h}\,\frac{h}{2^6-h}\\
&\vdots\\
tg^2\frac{180}{2^mn} &= \frac{2^{2m+1}-h}{2^{2m}-h}\,\frac{h}{2^{2m+2}-h}
\end{aligned}\right\} \quad 41)$$

Kao što se vidi, zbroj ovih izraza ne vodi do nikakvog preglednog rezultata, nasuprot pruža produkt, ako i ne jednostavna i elegantna sustava, a to barem po lako preglednim zakonom sastavljen izraz. Bit će:

$$tg^2\frac{180}{n}\,tg^2\frac{180}{2n}\cdot tg^2\frac{180}{2^2n}\cdot\ \ldots\ tg^2\frac{180}{2^m_n} =$$

$$= \frac{h^m\,(2-h)\,(2^3-h)\,(2^5-h)\ldots(2^{2m+1}-h)}{(2^0\quad h)\,(2^2-h)^2\,(2^4-h)^3\ldots(2^{2m}-h)^1\,(2^{2(m+1)}\quad h)} =$$

$$= \frac{h^m\,(2-h)\,(2^3-h)\,(2^5-h)\ldots(2^{2m+1}-h)}{(2^0-h)\,(2^{2(m+1)}-h)\left[(2^2-h)\,(2^4-h)\,(2^6-h)\ldots(2^{2m}-h)\right]^2} \quad 42)$$

II.

Ako pomoću ploha f_n, F_n, f_{2n}, F_{2n} tvorimo količnike na takav način, da će se u brojniku nalaziti zbroj odnosno razlika dviju ploha, a u nazivniku analogno zbroj ili razlika obiju ploha, pod predpostavkom, da će uvijek sve četiri plohe zastupane biti, onda ćemo dobiti ovih 12 mogućih slučajeva:

1	2	3	4			
$\frac{F_n + f_n}{F_n + f_{2n}}$,	$+$,	$-$,	$-$,	$+$,	hrpa količnika	a,
$\frac{f_{2n} + f_n}{F_{2n} + F_n}$,	$+$,	$-$,	$-$,	$+$,	„ „	b,
$\frac{F_{2n} + f_n}{f_{2n} + F_n}$,	$+$,	$-$,	$-$,	$+$,	„ „	c.

Daljnih 12 mogućih slučajeva bili bi recipročne vrijednosti tih količnika.

Da ne moramo kod našega istraživanja pisati cijele količnike, uvesti ćemo ove simbolične oznake:

a_1	a_2	a_3	a_4
b_1	b_2	b_3	b_4
c_1	c_2	c_3	c_4

gdje indeksi odgovaraju gornjim kombinacijama predznakova u vertikalnom redu, tako da se može na mjesto

$$c_1 = \frac{F_{2n} + f_n}{F_n + f_{2n}}, \text{ staviti } c_4 = \frac{F_{2n} - f_n}{F_n - f_{2n}}.$$

Vrijednosti svih količnika mogu se na običan način odrediti supstitucijom vrijednosti:

$$\left.\begin{aligned} f_n &= \frac{n\rho^2}{2} \; sin \; \frac{360}{n} \\ F_n &= n\rho^2 \; tg \; \frac{180}{n} \\ f_{2n} &= n\rho^2 \; sin \; \frac{180}{n} \\ F_{2n} &= 2n\rho^2 \; tg \; \frac{90}{n} \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Promatrajmo, prije nego opredijelimo po redu vrijednosti gornjih česnika, jedan količnik, n. pr. a_3, i odredimo njegovu vrijednost, ako supstituiramo mjesto gornjih vrijednosti plohe.

Pošto je $a_3 = \dfrac{F_n - f_n}{F_{2n} - f_{2n}}$ predstavljen, to slijedi:

$$\left.\begin{aligned} F_n - f_n &= n\rho^2 \left[\frac{\sin \frac{180}{n}}{\cos \frac{180}{n}} - \sin \frac{180}{n} \cdot \cos \frac{180}{n} \right] \\ F_{2n} - f_{2n} &= n\rho^2 \left[\frac{\sin \frac{90}{n}}{\cos \frac{90}{n}} - \sin \frac{90}{n} \cos \frac{90}{n} \right] \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Ove se razlike dadu preinačiti, i bit će:

$$\left.\begin{aligned} F_n - f_n &= \frac{n\rho^2 \sin^3 \frac{180}{n}}{\cos \frac{180}{n}} \\ \text{i} \\ F_{2n} - f_{2n} &= \frac{2n\rho^2 \sin^3 \frac{180}{2n}}{\cos \frac{180}{2n}} \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

dakle će biti kvocijenat:

$$a_3 = \frac{\sin^3 \frac{180}{n} \cos \frac{180}{2n}}{2 \sin^3 \frac{180}{2n} \cdot \cos \frac{180}{n}} = 4 \frac{\cos^4 \frac{180}{2n}}{\cos \frac{180}{n}} \quad 4)$$

Ako brojniku česnika pribrojimo i odbijemo član $\sin^4 \frac{180}{2n}$, onda ćemo dobiti:

$$a_3 = 4 \frac{\left[\cos^4 \frac{180}{2n} - \sin^4 \frac{180}{2n} \right] + \sin^4 \frac{180}{2n}}{\cos^2 \frac{180}{2n} - \sin^2 \frac{180}{2n}},$$

a ako provedemo diobu na desnoj strani, slijedit će:

$$a_3 = 4\left[1 + \frac{\sin^4 \frac{180}{2n}}{\cos \frac{180}{n}}\right] \qquad 5)$$

Izraz je u uglastoj zavorci uvijek veći od jedinice; jer $\sin \frac{180}{2n}$ i $\cos \frac{180}{n}$ mogu biti samo pozitivne vrijednosti, dakle prema tomu i kvocijenat $\frac{\sin^4 \frac{180}{2n}}{\cos \frac{180}{n}}$.

Ako ispitujemo, kojoj će se granici približavati česnik $\frac{\sin^4 \frac{180}{2n}}{\cos \frac{180}{n}}$, ako puštamo neprestano n rasti, to će se $\frac{180}{2n}$ i $\frac{180}{n}$ približavati ništici, dakle prema tomu i $\sin^4 \frac{180}{2n}$, dok će $\cos \frac{180}{n}$ imati kao granicu vrijednost *1*. Ako postane $n = \infty$, onda će vrijednost česnika $\frac{\sin^4 \frac{180}{2n}}{\cos \frac{180}{n}} = 0$, dakle će granicom kvocijenta biti:

$$a_3 = \frac{F_n - f_n}{F_{2n} - f_n} = 4 \qquad 6)$$

To bi bio put, kojim se može na običan način do cilja doći.

Ako pak upotrebimo dioni faktor k, onda možemo na temelju formula III. odsjek (17—20) naći vrlo jednostavno vrijednost spomenutoga kvocijenta. Poslije izvedene supstitucije bit će kvocijenat:

$$a_3 = \frac{F_n - f_n}{F_{2n} - f_{2n}} = \frac{k\,[1 - (k-1)^2]}{(k-1)\,[k - 2\,(k-1)]} = \frac{k^2}{k-1} \qquad 7)$$

gdje k prikazuje vrijednosti dionih faktora raznih poligona.

Na pitanje, koju će vrijednost kao granicu imati a_3, možemo lako odgovoriti, ako u jednadžbu radi $n = \infty$ odredjeni dioni faktor $n = 2$ umetnemo. Bit će:

$$a_3 = 4.$$

Za oba granična poligona, da se tako izrazimo: za trokut i za poligon sa neizmjerno mnogo stranica, primit će kvocijenti vrijednosti:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{za} & k = 3 & \text{bit će} & a_3 = \frac{9}{2} \\ \text{„} & k = 2 & \text{„} \quad \text{„} & a_3 = 4 \end{array}\right\}$$

U slijedećoj skrižaljci su sastavljene vrijednosti kvocijenata a_3 za nekoliko vrijednosti n.

n	a_3	n	a_3
3	4·5	200	4·000 000 014 4
10	4·002 52	400	4·000 000 009 548 1
20	4·000 16	600	4·000 000 000 193 21
30	4·000 03	900	4·000 000 000 036 00
40	4·000 009 52	1200	4·000 000 000 012 25
50	4·000 003 92	1800	4·000 000 000 002 592 1
60	4·000 001 87	2700	4·000 000 000 000 476 1
80	4·000 000 592 9	3600	4·000 000 000 000 202 5
90	4·000 000 372 1	5400	4·000 000 000 000 052 9
100	4·000 000 240 1		

Kad bi bio kvocijenat a_3 zadan, mogao bi se faktor k računskim putem naći, kako slijedi: jednadžba 7) daje:

$$a_3 = \frac{k^2}{k-1},$$

što se s obzirom na faktor k može pisati u obliku kvadratične jednadžbe:

$$k^2 - a_3 k + a_3 = 0.$$

Odatle slijedi:

$$k = \frac{1}{2}\left[a_3 \pm \sqrt{a_3{}^2 - 4a_3}\right].$$

Faktor k primit će realne vrijednosti tako dugo, dok će postojati:

$$a_3{}^2 - 4a_3 \geqq 0.$$

Ako poznademo jednom dioni faktor k, onda se može i poligon lako odrediti, kojemu on pripada; jer postoji za dioni faktor temeljna jednadžba:

$$k = 1 + \frac{1}{\cos \frac{180}{n}} = 1 + \sec \frac{180}{n},$$

a odatle se dade n odrediti. Bit će:

$$\frac{180}{n} = \operatorname{arc\,sec}(k-1) = \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{k-1}$$

i

$$n = \frac{180}{\operatorname{arc\,cos} \frac{1}{k-1}}.$$

Nameće se samo od sebe zanimljivo ispitivanje maksima i minima kvocijenta a_3, pošto možemo slutiti, da će postajati, jer ih posjeduje i faktor k.

Odgovor na to pitanje dat će nam jednadžba

$$a_3 = \frac{k^2}{k-1},$$

ako se ona promatra s obzirom na to pitanje.

Prvi diferencijalni kvocijenat toga količnika jest:

$$da_3 = \frac{k(k-2)}{(k-1)^2},$$

a taj će biti jednak ništici, kad bude:

$$k(k-2) = 0, \quad \text{odnosno} \quad \begin{cases} k = 0, \\ k = 2, \end{cases} \quad \text{ili pak:} \quad k-1 = \infty.$$

Samo $k = 2$ može pripadati realnom poligonu, a za tu će vrijednost biti drugi diferencijalni kvocijenat

$$d^2a_3 = \frac{2(k-1) - 2k(k-2)}{(k-1)^3} = 2,$$

dakle pozitivan, što kazuje, da postoji minimum kvocijenta.

Taj je minimum već prije izvedena vrijednost kvocijenta za $k = 2$, naime $a_3 = 4$.

Pripadne druge kubične jednadžbe dadu se s mjesta postaviti, ako se u općenitu kubičnu jednadžbu umetnu vrijednosti za a_3 na str. 124.

Pošto smo odredili na taj način kvocijenat a_3, kojega smo po volji izmedju drugih izvadili, to ćemo promatrati a_1, a_2, . . . a_4, b_1, ... i ustanoviti njihove odnošaje.

Kvocijenat $a_1 = \dfrac{F_n + f_n}{F_{2n} + f_{2n}}$ bit će po izvedenoj supstituciji:

$$a_1 = \frac{k\,[1 + (k-1)^2]}{(k-1)\,[k + 2\,(k-1)]} = \frac{k\,[k^2 - 2k + 2]}{(k-1)\,(3k-2)} = \frac{k^3 - 2k^2 + 2k}{3k^2 - 5k + 2}$$

Osobite vrijednosti spomenutoga kvocijenta bit će, i to za $k = 2$:

$$a_1 = \frac{2\,(1+1)}{2+2} = 1, \text{ za } k = 3,\ a_1 = \frac{3\,[1 + 2^2]}{2\,[3 + 2.2]} = \frac{15}{14}$$

Odnošaj izmedju a_1 i k vidjet će se iz jednadžbe trećega stupnja:

$$k_3 - (2 + 3a_1)\,k^2 + (2 + 5a_1)\,k - 2a_1 = 0,$$

koja prima za oba granična slučaja oblike:

$k^3 - 5k^2 + 7k - 2 = 0$ za poligon sa neizmjerno mnogo stranica,

i $k^3 - \dfrac{73}{14}\,k^2 + \dfrac{103}{14}\,k - \dfrac{15}{7} = 0$ za pravilan trokut.

Riješimo li te jednadžbe na poznati način, to ćemo za poligon sa neizmjerno mnogo stranica dobiti:

$$\left\{\begin{array}{l} k_1 = 2 \\ k_{2,3} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \end{array}\right.$$

a za pravilan trokut:

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = 3 \\ k_{2,3} = \dfrac{31 \pm \sqrt{301}}{28} \end{array}\right\}$$

Vidi se, da u oba slučaja vrijednosti k_2 i k_3 ne mogu prikazivati realni dioni faktor, nego da će jedino

$$k_1 = 2, \text{ odnosno } k_1 = 3$$

prikazivati željene vrijednosti dionih faktora.

Za neke su dione faktore u ovoj skrižaljci poredjane vrijednosti količnika, koje im pripadaju:

n	a_1	n	a_1
3	4·930	200	0·999 960 3
10	0·966 669	400	0·999 990 5
20	0·996 012	600	0·999 994 8
30	0·998 917	900	0·999 998 6
40	0·999 234	1200	0·999 999 125
50	0·999 463	1800	0·999 999 598
60	0·999 659	2700	0·999 999 828
80	0·899 809	3600	0·999 999 887 5
90	0·999 848	5400	0·999 999 956 4
100	0·999 878		

Za kvocijenat $a_2 = \dfrac{F_n + f_n}{F_{2n} - f_{2n}}$ dobit ćemo poslije izvedene supstitucije:

$$a_2 = \frac{k\,[1 + (k-1)^2]}{(k-1)\,[2\,(k-1) - k]} = \frac{k\,(k^2 - 2k + 2)}{(k-1)\,(k-2)}.$$

Ako i ovdje odredimo vrijednosti kvocijenta za $k = 2$ i $k = 3$, dobit ćemo:

$$a_2 = \infty \quad \text{za} \quad k = 2$$

$$\text{i } a_2 = \frac{15}{2} \quad \text{za} \quad k = 3.$$

Vrijednosti drugih nekih kvocijenata složene su u ovoj skrižaljci:

n	a_2	n	a_2
3	7·5	200	33 339·00
10	79·64	400	117 652·46
20	402·32	600	287 775·78
30	728·03	900	662 679 92
40	1 434·69	1200	1 142 863·12
50	2 023·04	1800	2 484 476·80
60	2 923·58	2700	5 797 107·45
80	4 597·73	3600	8 888 894·89
90	6 552·63	5400	17 391 306·35
100	8 169·26		

Naša će pak kubična jednadžba, koja odredjuje odnošaj medju a_2 i k, biti:

$$k^3 - (2+a_2)\,k^2 + (2+3a_2)\,k - 2a_2 = 0.$$

Promatrajmo i ovdje oba granična slučaja, to će slijediti za poligon sa neizmjerno mnogo stranica:

a) $$\frac{k^3}{a_2} - \left(\frac{2}{a_2} + 1\right)k^2 + \left(\frac{2}{a_2} + 3\right)k - 2 = 0,$$

odnosno $$k^2 - 3k + 2 = 0,$$

a korijeni te jednadžbe bit će:

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

gdje $k = 2$ prikazuje vrijednost traženoga dionoga faktora.

b) Za pravilan trokut primit će kubična jednadžba slijedeći oblik:

$$k^3 - \frac{19}{2}\,k^2 + \frac{49}{2}\,k - 15 = 0.$$

Riješimo li ovu, onda će zbog $k_1 = 3$ preostati kvadratična jednadžba:

$$k^2 - \frac{13}{2}\,k + 5 = 0,$$

koja ima opet korijene:

$$k_{2,3} = \frac{13 \pm \sqrt{89}}{4}.$$

Može se lako pregledati, da može u prvom slučaju samo $k_1 = 2$ prikazivati traženu vrijednost od k, dok $k = 1$ nema nikakve važnosti. U drugom slučaju može pak samo $k_1 = 3$ odgovarati pravilnom trokutu, dok korijeni k_2 i k_3 znatno prekoračuju maksimum i minimum vrijednosti dionoga faktora, ne mogu dakle prikazivati rezultate.

Pogledajmo sad još zadnju kombinaciju vrijednosti plohâ u kvocijentu $a_4 = \dfrac{F_n - f_n}{F_{2n} + f_{2n}}$, iz ovoga slijedi:

$$a_4 = \frac{k\,[(k-1)^2 - 1]}{(k-1)\,[2\,(k-1) + k]} = \frac{k\,(k^2 - 2k - 2)}{(k-1)\,(3k-2)}.$$

Ova jednadžba daje poslije dovršene supstitucije za

$$k = 2, \qquad a_4 = 0,$$

dok za $k = 3, \quad a_4 = {}^9/_{14}$ slijedi:

n	a_4	n	a_4
3	0·642 857 14	200	0·000 109 977 5
10	0·049 532 15	400	0·000 030 948 3
20	0·011 493 387 5	600	0·000 013 899 645
30	0 005 453 045 25	900	0·000 004 728 946
40	0·003 080 072 75	1200	0·000 003 499 965
50	0·001 927 067 43	1800	0·000 001 609 995 5
60	0·001 368 717 25	2700	0·000 000 689 997 6
80	0·000 767 541 225	3600	0·000 000 477 776 925
90	0·000 609 598 975	5400	0·000 000 229 999 889
100	0·000 489 577 575		

Kubična jednadžba, iz koje se dade razabrati odnošaj izmedju a_4 i k, glasi:

$$k^3 - (2 + 3a_4)\, k^2 + 5a_4\, k - 2a_4 = 0.$$

Ona će prijeći, ako stavimo:

a) $a_3 = 0$ u $\qquad k^3 - 2k^2 = 0,$ i

b) $a_3 = {}^9/_{14}$ u $\quad k^3 - \frac{55}{14}\, k^2 + \frac{45}{14}\, k - \frac{9}{7} = 0.$

Ako obje predjašnje jednadžbe s obzirom na k riješimo, dobit ćemo $k_1 = k_2 = 0$, i $k_3 = 2$ u prvom slučaju; dok će za drugi slučaj izaći $k_1 = 3$ i korijeni kvadratične jednadžbe

$$k^2 - \frac{13}{14}\, k + \frac{6}{14} = 0,$$

naime $\qquad k_{2,3} = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 336}}{28} = \dfrac{13 \pm \sqrt{-167}}{28}.$

Jasno je, da u prvom slučaju samo $k = 2$ prikazuje traženu vrijednost, dok u drugom slučaju prva vrijednost $k_1 = 3$ realnom poligonu i to trokutu odgovara. k_2 i k_3 pripadaju imaginarnim vrijednostima.

Pošto smo sve kvocijente a promotrili, podjimo dalje i pogledajmo, kakve ćemo relacije dobiti za kvocijente b.

Kvocijenat $b_1 = \frac{f_{2n} + f_n}{F_n - F_{2n}}$ prijeći će poslije umetnutih vrijednosti u:

$$b_1 = \frac{k^2}{(k-1)^2 (2+k)}, \quad \frac{k^2}{k^3 - 3k + 2},$$

odatle slijedi:

$$\text{za } k = 2, \quad b_1 = 1,$$
$$\text{za } k = 3, \quad b_1 = {}^9/_{20}.$$

U predjašnjem slučaju bit će odnošaj izmedju b_1 i k slijedećom jednadžbom označen:

$$k^3 - \frac{1}{b_1} k^2 - 3k + 2 = 0,$$

koja je s obzirom na k jednadžba trećega stupnja.

S obzirom na predjašnju općenitu kubičnu jednadžbu, možemo slijedeći analogon postaviti: Pošto je apsolutni član te kubične jednadžbe pozitivan, i pošto svaka jednadžba neparnog stupnja jedan realan korijen imati mora, kojega je predznak protivan onomu od apsolutnoga člana, to možemo reći: Predjašnja kubična jednadžba mora imati jedan negativan korijen. U tom slučaju moraju se pozitivni korijeni u parnom broju nalaziti. Da pako jednadžba ima najviše jedan negativan korijen, potvrdjuje Harriot-ov poučak, pošto je u predjašnjoj jednadžbi samo jedan put jednak predznak iza predidućega, koje nam svojstvo daje, prema tomu koliko puta dolazi, broj negativnih korijena jednadžbe.

Kubične jednadžbe, koje pripadaju specijalnim vrijednostima od $b_1 = 1$, odnosno ${}^9/_{20}$, bit će:

$$k^3 - k^2 - 3k + 2 = 0,$$

odnosno:

$$k^3 - \frac{20}{9} k^2 - 3k + 2 = 0.$$

Ako riješimo obje jednadžbe, dobit ćemo, i to za prvu: $k_1 = 2$, i kvadratičnu jednadžbu $k^2 + k - 1 = 0$ sa korijenima

$$k_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2};$$

*

za drugu pak $k_1 = 3$, i kvadratičnu jednadžbu

$$k^2 + \frac{7}{9} k - \frac{2}{3} = 0,$$

koja ima korijene

$$k_{2,3} = \frac{-7 \pm \sqrt{265}}{18}.$$

Vidimo, da se naša postavljena analiza obistinjuje; u oba slučaja dobivamo dva pozitivna korijena:

$$k_1 = 2 \qquad k_1 = 3$$
$$k_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \text{ odnosno } k_2 = \frac{-7+\sqrt{265}}{18},$$

kao i jedan negativan korijen:

$$k_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \text{ odnosno } k_3 = \frac{-7-\sqrt{265}}{18}.$$

Dalje možemo bez poteškoće razabrati, da samo $k_1 = 2$, odnosno $k_1 = 3$ prikazuju željena riješenja.

Nekoje druge vrijednosti kvocijenta mogu se u slijedećoj skrižaljci naći:

n	b_1	n	b_1
3	0·45	200	0·999 859
10	0·939 624	400	0·999 961
20	0·984 664	600	0·999 980 25
30	0·993 150	900	0·999 988 50
40	0·995 408	1200	0·999 993 25
50	0·997 581	1800	0·999 996 75
60	0·998 2903	2700	0·999 998 75
80	0·999 0385	3600	0·999 999 2877
90	0·999 2383	5400	0·999 999 7212
100	0·999 3885		

Kvocijenat $b_2 = \frac{f_{2n} + f_n}{F_n - F_{2n}}$ primit će oblik:

$$\frac{k^2}{(k-1)^2 (k-2)} = \frac{k^2}{k^3 - 4k^2 + 5k - 2}.$$

Ovaj će izraz dobiti za:

$$k = 2 \text{ vrijednost } b_2 = \infty,$$

a za: $k = 3$ postat će isti $b_2 = {}^9/_4$.

U slijedećoj su skrižaljci sastavljene vrijednosti b za razne druge dione faktore:

n	b_2	n	b_2
3	2·25	200	50 006·00
10	76·069	400	153 850·90
20	317·075	600	444 450·55
30	725·677	900	666 670·66
40	1290 981	1200	888 892·00
50	2378·588	1800	2 484 476·05
60	2936 571	2700	5 797 105·45
80	5190·765	3600	11 428 573·70
90	6550·638	5400	17 391 308·35
100	6794·500		

Kubična jednadžba, koja prikazuje odnošaj izmedju b_2 i k, glasi:

$$k^3 - \left(4 + \frac{1}{b_2}\right) k^2 + 5k - 2 = 0,$$

a ona prelazi u

$$k3 - 4k^2 + 5k - 2 = 0, \text{ ako stavimo } b_2 = \infty$$

i u $$k^3 - \frac{40}{9} k^2 + 5k - 2 = 0, \text{ za } b_2 = {}^9/_4.$$

Ako pojedince riješimo jednadžbe, slijedit će:
za prvu kvadratičnu jednadžbu

$$\begin{cases} k_1 = 2 \\ k_{2,3} = 1; \end{cases}$$

a za drugu kubičnu jednadžbu

$$k_1 = 3$$
$$k_{2,3} = \frac{13 \pm \sqrt{-47}}{18}.$$

Kako vidimo, samo su od važnosti vrijednosti $k_1 = 2$, odnosno $k_1 = 3$, dok $k_{2,3} = 1$ radi vrijednosti, koja pada ispod minimuma,

i $k_{2,3}$ u drugom slučaju radi imaginarnih vrijednosti obaju korijena ne prikazuju riješenja realnog pravilnog poligona.

Promatrajmo kvocijenat $b_3 = \frac{f_{2n} - f_n}{F_n - F_{2n}}$, koji prelazi poslije supstitucije vrijednosti, u $b_3 = \frac{k}{(k-1)^2}$.

Ovaj će izraz prijeći u

$$b_3 = 2, \text{ ako stavimo } k = 2,$$

i

$$b_3 = {}^3/_4, \text{ ako stavimo } k = 3.$$

Vrijednosti su kvocijenata, koji pripadaju raznim poligonima, složene u slijedećoj skrižaljci:

n	b_3	n	b_3
3	0·75	200	1·999 664
10	1·855 572	400	1·999 783
20	1·964 298	600	1·999 959
30	1·983 592	900	1·999 982
40	1·990 771	1200	1·999 989 66
50	1·994 196	1800	1·999 995 17
60	1·995 911	2700	1·999 997 94
80	1·997 693	3600	1·999 998 66
90	1·998 172	5400	1·999 999 32
100	1·998 533		

Odnošaj, koji postoji izmedju kvocijenta b_3 i k, vodi do slijedeće jednadžbe:

$$k^2 - k\left(2 + \frac{1}{b_3}\right) + 1 = 0,$$

koja je s obzirom na k drugoga stupnja. Ona će prijeći za pojedine specijalne supstitucije u:

$$k^2 - \frac{5}{2}k + 1 = 0, \text{ ako umetnemo za } b = 2,$$

i

$$k^2 - \frac{10}{3}k + 1 = 0, \text{ ako umetnemo za } b = {}^3/_4.$$

Riješimo li jednadžbe, dobit ćemo:

$$k_{1,2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \begin{cases} 2 \\ {}^1/_4, \end{cases}$$

u drugom pak slučaju

$$k_{1,2} = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = \frac{5 \pm \sqrt{16}}{4} = \begin{cases} 3 \\ 1/3. \end{cases}$$

Jedino vrijednosti $k = 2$, odnosno $k = 3$ mogu pripadati pravilnom poligonu, koji zbilja postoji, dok oba druga korijena nikakva realnog prava nemaju.

Ispitujmo sad odnošaj za kvocijenat $b_4 = \frac{f_{2n} - f_n}{F_n + F_{2n}}$ 12)

Ovaj će kvocijenat, ako uvedemo vrijednosti veličine plohâ, primiti oblik:

$$b_4 = \frac{k(k-2)}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{k^2 - 2k}{k^3 - 3k + 2}.$$

Supstituiramo li u kvocijenat ekstremne vrijednosti dionog faktora, bit će:

$$\text{za } k = 2, \quad b_3 = 0,$$
$$\text{„ } k = 3, \quad b_3 = 3/20.$$

Za druge specijalne vrijednosti k. dobit ćemo za razne poligone kvocijente slijedeće skrižaljke:

n	b_4	n	b_4
3	0·15	200	0·000 059 8839
10	0·023 5703	400	0·000 015 4489
20	0·006 0970	600	0·000 006 9497
30	0·002 7485	900	0·000 002 9997
40	0·001 5355	1200	0·000 001 7497
50	0·000 9869	1800	0·000 000 8051
60	0·000 6834	2700	0·000 000 3453
80	0·000 3833	3600	0·000 000 2252
90	0·000 3045	5400	0·000 000 1150
100	0·000 2447		

Poredamo li gornju jednadžbu po potencama od k, primit će ona slijedeći oblik:

$$k^3 - \frac{1}{b_4} k^2 + \left(-3 + \frac{2}{b_4}\right) k + 2 = 0.$$

Specializiramo li našu jednadžbu, za obje granične vrijednosti dionih faktora, prijeći će jednadžba u:

$$k^2 - 2k = 0, \text{ ako stavimo za } b^4 = 0, \text{ i u}$$

$$k^3 - \frac{20}{3}k^2 + \frac{31}{3}k + 2 = 0, \text{ ako stavimo za } b_4 = {}^3/_{20}.$$

Korijeni te jednadžbe jesu: $k = 2$ i $k_1 = 3$, $k_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{245}}{6}$

Opet su $k = 2$ i $k = 3$ riješenja naše jednadžbe, dok k_2 u drugom slučaju prekoračuje maksimum dionoga faktora, k_3 je pak negativ i radi toga ne može na nijedan način biti riješenje naše zadaće.

Premda će se razmatranja (i kriterija) za slijedeće kvocijente c na analogan način voditi, i premda će se kriteriji na sličan način dobiti, razvit ćemo ih ipak u potpunom opsegu već radi potpunosti djela i da naše konačne zaključke tim sigurnije izreći možemo.

Kvocijenat $c_1 = \frac{F_{2n} + f_n}{F_n + f_{2n}}$ primit će slijedeći oblik, ako u nj vrijednosti plohâ uvedemo:

$$c_1 = \frac{k + 2(k-1)^2}{k^2(k-1)} = \frac{2k^2 - 3k + 2}{k^3 - k^2}.$$

Ovaj će kvocijenat primiti maksimalnu vrijednost, ako supstituiramo za dioni faktor $k = 2$, naime $c_1 = 1$, koji vrijedi za poligon sa neizmjerno mnogo stranica, dok $c_2 = \frac{11}{18}$ dobiva svoj minimum i to za vrijednost $k = 3$.

Za specijalne supstitucije dionog faktora dobit ćemo slijedeću skrižaljku:

n	c_1	n	c_1
3	0·611 11	200	0·999 937 75
10	0·963 573	400	0·999 976 83
20	0·992 818	600	0·999 989 57
30	0·995 890	900	0·999 997 25
40	0·997 686	1200	0·999 997 41
50	0·998 568	1800	0·999 999 195 5
60	0·998 975	2700	0·999 999 482 5
80	0·999 423	3600	0·999 999 662 75
90	0·999 543	5400	0·999 999 802 75
100	0·999 633		

Za dioni faktor slijedi iz gornjeg odnošaja kubična jednadžba:

$$k^3 - \left(1 + \frac{2}{c_1}\right) k^2 + \frac{3}{c_1} k - 2 = 0,$$

koja za ekstremne vrijednosti $k = 2$ i $k = 3$ prelazi u

$$f(k) = k^3 - 3k^2 + 3k - 2 = 0, \text{ za } k = 2,$$

$$f(k) = k^3 - \frac{47}{11} k^2 + \frac{54}{11} k - \frac{36}{11} = 0, \text{ za } k = 3.$$

Predočimo si prije svega malu sliku o riješenjima te jednadžbe!

Pošto je apsolutni član negativan, mora jednadžba imati svakako jedan pozitivan korijen, ali može osim ovoga biti još parni broj pozitivnih korijena, dakle u našem slučaju 2. Negativnih korijena ne može naša jednadžba prema poučku Harriot-a imati, pošto jedan te isti predznak neposredno za drugim ne slijedi; isto je to i u jednadžbi $f(-k) = 0$, u kojoj se predznaci neprestano mijenjaju.

Da ima pozitivnih korijena govori jasno to, što se predznaci neprestano mijenjaju kod članova jednadžbe, premda tomu mogu biti uzrok imaginarni brojevi, koji se u jednadžbi uvijek u parnom broju nalaze.

Prva od obiju gornjih jednadžaba daje riješenja

$$k_1 = 2 \text{ i } k^2 - k + 1 = 0;$$

odatle opet slijedi

$$k_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}, \text{ dakle dva imaginarna korijena.}$$

Druga pak jednaždba ima korijene:

$$k_1 = 3 \text{ i } k_{2,3} = \frac{7 \pm \sqrt{-83}}{11};$$

zadnje vrijednosti su opet imaginarne.

Korijeni $k_1 = 2$, odnosno $k_1 = 3$ mogu prikazivati realna riješenja, dok k_2 i k_3 kod obiju jednadžaba do imaginarnih poligona vode.

Vidi se odatle jasno, da se naša analiza kubičnih jednadžaba obistinila: jedan pozitivan i dva imaginarna (združena) korijena.

Kvocijenat $c_2 = \frac{F_{2n} + f_n}{F_n - f_{2n}}$ primit će poslije supstituiranih ploha oblik:

$$c_2 = \frac{k + 2(k-1)^2}{k(k-1)(k-2)} = \frac{2k^2 - 3k + 2}{k^3 - 3k^2 + 2k}.$$

Za maksimum $k = 2$, bit će kvocijenat $c_2 = \infty$; dok će za $k = 3$ slijediti $c_2 = {}^{11}/_{6}$.

Ista formula dat će nam vrijednosti u slijedećoj skrižaljci, ako za razne poligone uvedemo njihove dione faktore:

n	c_2	n	c_2
3	1·83	200	20 003·00
10	38·67	400	64 727·58
20	161·31	600	143 887·40
30	362·46	900	333 336·33
40	646·82	1200	571 431·07
50	1063·07	1800	1 242 239·03
60	1459·16	2700	2 702 030·72
80	2596·53	3600	4 040 406·32
90	3278·50	5400	8 695 654·78
100	4088·31		

Odnošaj za dioni faktor k izveden iz gornje jednadžbe, glasi:

$$k^3 - \left(3 + \frac{2}{c_2}\right) k^2 + \left(2 + \frac{3}{c_2}\right) k - \frac{2}{c_2} = 0,$$

koja će specijaliziranjem prijeći u:

$$\left.\begin{aligned} &k^3 - 3k^2 + 2k = 0 \quad \text{i} \\ &k^3 - \frac{45}{11} k^2 + \frac{40}{11} k - \frac{12}{11} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Za ovu kubičnu jednadžbu vrijede isti kriteriji, kao i za onu kod kvocijenta c_1.

Jednadžba mora imati jedan pozitivan korijen; druga dva korijena mogu takodjer pozitivni biti, ili su pak imaginarni.

Riješimo li gornje jednadžbe, dobit ćemo za prvu:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= 0 \\ k_{2,3} &= \frac{3 \pm 1}{2} = \end{aligned}\right\} \begin{matrix} 2 \\ 1; \end{matrix}$$

za drugu pak: $k_1 = 3$ i kvadratičnu jednadžbu

$$k^2 - \frac{12}{11} k + \frac{4}{11} = 0,$$

sa korijenima

$$k_{2,3} = \frac{2}{11}(3 \pm \sqrt{-2}).$$

Oba su zadnja korijena imaginarne vrijednosti.

Vidimo evo opet potpuno potvrdjenu našu analizu jednadžaba trećega stupnja, ovdje se obje mogućnosti spajaju, i to: prva od specijalnih kubičnih jednadžaba daje jedan pozitivan korijen, a ostala dva korijena su takodjer pozitivne vrijednosti; druga jednadžba ima opet jedan pozitivan korijen, dok su druga dva korijena imaginarni brojevi, kako to zaista po teoriji biti mora.

Ispitujmo sad treći kvocijenat $c_3 = \frac{F_{2n} - f_n}{F_n - f_{2n}}$. Ovaj će prijeći poslije supstituiranih ploha u:

$$c_3 = \frac{-k + 2(k-1)^2}{k(k-1)(k-2)} = \frac{2k^2 - 3k + 2}{k^3 - 3k^2 + 2k};$$

koji će izraz za $k = 2$ primiti vrijednost $c_3 = 3/2$, a za $k = 3$ $c_3 = 5/6$.

Kvocijenat $c_3 = 3/2$ ne dobiva se direktno iz jednadžbe

$$c_3 = \frac{2(k-1)^2 - k}{k(k-1)(k-2)}$$

supstitucijom $k = 2$; jer bi c_3 dobili u neodredjenom obliku

$$c_3 = \frac{f(k)}{F(k)} = \frac{2(k-1)^2 - k}{k(k-1)(k-2)} \overset{k=2}{=} \frac{0}{0}.$$

Diferenciramo li zasebice na poznati način brojnik i nazivnik, slijedi: $\frac{f'(k)}{F'(k)} = \frac{4k-5}{3k^2-6k+2}$; ovaj izraz prelazi u $\frac{f'(k)}{F'(k)} = \frac{3}{2}$, ako umetnemo za k vrijednost 2.

$\frac{f'(k)}{F'(k)} = \frac{3}{2}$ je ujedno kvocijenat c_3.

Slijedeća skrižaljka daje vrijednosti kvocijenta za različite poligone:

n	c_3	n	c_3
3	0·83	200	1·800 000
10	1·441 81	400	1·500 000
20	1·484 61	600	1·500 000
30	1·492 98	900	1·500 000
40	1·496 29	1200	1·357 142
50	1·576 88	1800	1·500 000
60	1·498 18	2700	1·398 649
80	1·498 72	3600	1·343 434
90	1·499 592	5400	1·500 000
100	1·501 532		

Odnošaj za dioni faktor primit će oblik kubične jednadžbe:

$$k^3 - \left(3 + \frac{2}{c_3}\right) k^2 + \left(2 + \frac{5}{c_3}\right) k - \frac{2}{c_3} = 0.$$

Ona će prijeći specijalnom supstitucijom vrijednosti $k = 2$ i $k = 3$ u:

$$k^3 - \frac{13}{3} k^2 + \frac{16}{3} k - \frac{4}{3} = 0$$

i

$$k^3 - \frac{27}{5} k^2 + \frac{40}{5} k - \frac{12}{5} = 0.$$

Riješimo li jednadžbe, dobit ćemo vrijednosti:

za prvu

$$\begin{cases} k_1 = 2 \\ k_{2,3} = \dfrac{7 \pm 5}{6} = \begin{cases} 2 \\ 1/3 \end{cases} \end{cases};$$

a za drugu

$$\begin{cases} k_1 = 3 \\ k_{2,3} = \dfrac{6 \pm 4}{5} = \begin{cases} 2 \\ 1/5 \end{cases} \end{cases}.$$

Kako vidimo, imadu obje jednadžbe sva tri korijena pozitivna, kako to gradnji jednačaba u istinu odgovara. Imademo pred sobom slučaj, koji analizi kubičnih jednačaba, na str. 137. (29.), posvema odgovara; imademo na ime kao riješenje sva tri pozitivna korijena.

Od sva tri korijena ne možemo svaki upotrijebiti, pošto svi ne odgovaraju realnim poligonima. Neke bo vrijednosti tih korijena leže daleko ispod minimuma dionog faktora $k = 2$.

Opravdana riješenja daje prva jednadžba u $k_1 = 2$, a druga u $k_1 = 3$.

Druga jednadžba ima istina kao korijen vrijednost $k_2 = 2$, ali ova ne može odgovarati kvocijentu $c_3 = {}^5/_6$, jer on pripada istostranom trokutu, dok $k_2 = 2$ odgovara poligonu sa neizmjerno mnogo stranica.

Za četvrti kvocijenat treće hrpe $c_4 = \dfrac{F_{2n} - f_n}{F_n + f_{2n}}$ slijedit će, ako ako uvedemo vrijednost k, jednadžba:

$$c_4 = \frac{2\,(k-1)^2 - k}{k^2\,(k-1)} = \frac{2k^2 - 3k + 3}{k^3 - k^2}.$$

Umetnemo li u nju $k = 2$, dobit ćemo $c_4 = 0$, a za $k = 3$, slijedi $c_4 = \dfrac{5}{18}$.

Za druge specijalne vrijednosti k dobit ćemo za kvocijente vrijednosti, koje su u slijedećoj skrižaljci složene.

Izrazimo li odnošaj izmedju c_4 i k u kubičnoj jednadžbi, i poredamo li je po padajućim potencama k, dobit ćemo:

$$k^3 - \left(1 + \frac{2}{c_4}\right) k^2 + \frac{5}{c_4}\, k - \frac{2}{c_4} = 0.$$

Specijaliziranjem jednadžbe za $c_4 = 0$ i $c_4 = \dfrac{5}{18}$ prijeći će ona u:

$$\left.\begin{aligned} -\,2k^2 + 5k - 2 &= 0, \quad \text{i} \\ k^3 - \frac{41}{5}\, k^2 + \frac{90}{5}\, k - \frac{36}{5} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Korijeni predjašnjih jednačaba jesu:

i to za prvu $\quad k_1 = 0,$

$$k_{2,3} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2, \\ {}^1/_4; \end{cases}$$

za drugu $k_1 = 3$, i kvadratična jednadžba $k^2 - \dfrac{26}{5}\, k + \dfrac{12}{5} = 0$,

iz ove pak slijedi:

$$k_{2,3} = \frac{13 \pm \sqrt{109}}{5}.$$

I ovdje nam se potvrdjuje analiza kubičnih jednačaba na strani 137. (29.).

Samo vrijednost $k_2 = 2$ medju korijenima prve jednadžbe odgovara supstituciji $c_4 = 0$, naime za poligon sa neizmjerno mnogo stranica.

Za drugu je jednadžbu opravdan samo korijen $k_1 = 3$, koji i odgovara supstituciji $c_4 = {}^5/_{18}$, koja opet vrijedi za pravilan trokut.

Obje druge vrijednosti k_2 i k_3 prekoračuju maksimalnu vrijednost 3, odnosno padaju ispod minimalne vrijednosti 2 dionog faktora k.

n	c_4	n	c_4
3	0·277 77	200	0·000 089 979 825
10	0·035 860 59	400	0·000 022 498 656 25
20	0·011 646 02	600	0·000 014 024 610 25
30	0·004 099 65	900	0·000 004 499 946 25
40	0·002 307 96	1200	0·000 002 374 985 75
50	0·001 407 829	1800	0·000 001 207 461 15
60	0·001 025 687	2700	0·000 000 501 749 30
80	0·000 575 862 7	3600	0·000 000 337 499 69
90	0·000 457 190 8	5400	0·000 000 172 499 92
100	0·000 367 130 5		

III.

Na sličan način, kako smo razvili relacije za koeficijente a, b, c, koji sadržavaju u sebi f_n, F_n, f_{2n} i F_{2n}, možemo upotrijebiti kvadrate opsegâ pojedinih poligona u_n^2, U_n^2, u_{2n}^2, U_{2n}^2, da sličnim postupkom dobijemo nove relacije.

12 mogućih slučajeva za poligone bit će:

1	2	3	4			
$\frac{U_n^2 + u_n^2}{U_{2n}^2 + u_{2n}^2}$,	+	—	—			
	—	—	+	hrpa količnika		α,
$\frac{u_{2n} + u_n^2}{U_{2n}^2 + U_n^2}$,	+	—	—			
	—	—	+	„	„	β,
$\frac{U_{2n}^2 + u_n^2}{u_{2n}^2 + U_n^2}$,	+	—	—			
	—	—	+	„	„	γ.

Kraj ovih kvocijenata možemo opet 12 novih postaviti, ali oni ne će ništa drugo prikazivati, nego recipročne vrijednosti predjašnjih česnika.

Slično kao kod ploha, uvest ćemo i ovdje simbolične oznake:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{array}$$

Ovdje odgovaraju indeksi gornjim kombinacijama predznakova u vertikalnom smislu, tako da razumijemo pod

$$\beta_2 = \frac{u_{2n}^2 + u_n^2}{U_{2n}^2 - U_n^2}, \text{ a pod } \gamma_3 = \frac{U_{2n}^2 - u_n^2}{u_{2n}^2 + U_n^2}.$$

Odredjivanje pojedinih kvocijenata može se na sličan način provesti, ako mjesto:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= 2n\varrho \ \ sin \ \frac{180}{n} \\ U_n &= 2n\varrho \ \ tg \ \frac{180}{n} \\ u_{2n} &= 2^2 n\varrho \ sin \ \frac{180}{2n} \\ U_{2n} &= 2^2\varrho \ \ tg \ \frac{180}{2n} \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

u kvocijente umetnemo ove vrijednosti, i ako izraze onda u što jednostavnijem obliku predočimo.

Mi ćemo obični put razjasniti jednim primjerom, zato promatrajmo povoljni kvocijenat, n. pr.

$$\alpha_3 = \frac{U_n^2 - u_n^2}{U_{2n}^2 - u_{2n}^2} \qquad 2)$$

Dobit ćemo:

$$\left.\begin{aligned} U_n^2 - u_n^2 &= (2n\varrho)^2 \left[tg^2 \frac{180}{n} - sin^2 \frac{180}{n} \right] \\ U_n^2 - u_{2n}^2 &= (2^2 n\varrho)^2 \left[tg^2 \frac{180}{2n} - sin^2 \frac{180}{2n} \right] \end{aligned}\right\}$$

Ove se razlike dadu preinačiti, i dat će:

$$\left.\begin{aligned} U_n^2 - u_n^2 &= (2n\varrho)^2 \frac{\sin^4 \frac{180}{n}}{\cos^2 \frac{180}{n}} \\ U_{2n}^2 - u_{2n}^2 &= (4n\varrho)^2 \frac{\sin^4 \frac{90}{n}}{\cos^2 \frac{90}{n}} \end{aligned}\right\}$$

Bit će dakle promatrani kvocijenat:

$$\alpha_3 = \frac{\sin^4 \frac{180}{n} \cdot \cos^2 \frac{90}{n}}{2^2 \sin^4 \frac{90}{n} \cdot \cos^2 \frac{180}{n}} = 2^2 \frac{\cos^4 \frac{90}{n} \cdot \cos^2 \frac{90}{n}}{\cos^2 \frac{180}{n}} =$$

$$= 2^2 \frac{\cos^4 \frac{90}{n}}{\left(\frac{\cos^2 \frac{180}{n}}{\cos^2 \frac{90}{n}}\right)} \qquad 3)$$

Dodamo li brojniku $\sin^4 \frac{90}{n}$ i oduzmemo li mu isti član, dobit ćemo:

$$\alpha_3 = 2 \frac{2\cos^4 \frac{90}{n} - \sin^4 \frac{90}{n} + \sin^4 \frac{90}{n}}{\left(\frac{\cos^2 \frac{90}{n} - \sin^2 \frac{90}{n}}{\cos \frac{90}{n}}\right)^2} =$$

$$= 2^2 \left[\frac{\cos^2 \frac{90}{n}}{\cos \frac{180}{n}} + \frac{\sin^4 \frac{90}{n} \cos^2 \frac{90}{n}}{\cos^2 \frac{180}{n}} \right]$$

Tražimo li graničnu vrijednost, koju ovaj izraz prima za $n = \infty$, onda će česnik $\frac{\sin^4 \frac{90}{n} \cos^2 \frac{90}{n}}{\cos^2 \frac{180}{n}}$ primiti vrijednost ništice, dok

će biti $\frac{\cos^2 \frac{90}{n}}{\cos \frac{180}{n}} = 1$, a cijeli će kvocijenat biti:

$$\alpha_3 = \frac{U_n^2 - u_n^2}{U_{2n}^2 - u_{2n}^2} = 2^2. \qquad 4)$$

Izvedba ove vrijednosti slijedi pomoću faktora k na mnogo elegantniji način.

Ako uvedemo vrijednosti za periferije iz poglavlja II., jednadžbe 3.—6. dobit ćemo poslije jednostavne redukcije:

$$\alpha_3 = \frac{U_n^2 - u_n^2}{U_{2n}^2 - u_{2n}^2} = \frac{k^3}{2\,(k-1)} \qquad 5)$$

Ovaj će česnik imati kao granične vrijednosti i to za $k = 2$, $\alpha_3 = 2^2$, što odgovara poligonu sa neizmjerno mnogo stranica, i za

$$k = 3, \quad \alpha_3 = \frac{33}{2^2} = \frac{27}{4} = 6^3/_4.$$

Pojedine vrijednosti kvocijenta α_3 za druge pravilne poligone leže unutar upravo spomenutih granica i zabilježeni su neki od njih u slijedećoj skrižaljci:

n	α_3	n	α_3
3	6·75	200	4·000 169 98
10	4·104 907	400	4·000 061 798 091
20	4·025 074 5	600	4·000 027 799 624
30	4·011 050 5	900	4·000 011 999 930
40	4·006 189 1	1200	4·000 006 999 976
50	4·003 863 5	1800	4·000 003 219 994
60	4·002 742 5	2700	4·000 001 384 999 05
80	4·001 541 2	3600	4·000 000 899 999 019
90	4·001 220 5	5400	4·000 000 459 999
100	4·000 980 1		

Relacije izmedju α_3 i k imat će oblik kubične jednadžbe, i to:

$$k^3 - 2\alpha_3 k + 2\alpha_3 = 0,$$

koja će supstitucijom osobitih vrijednosti prijeći u:

$$k^3 - 2^3 k + 2^3 = 0, \text{ za } \alpha_3 = 2^2$$

i

$$k^3 - \frac{27}{2} k + \frac{27}{2} = 0, \text{ za } \alpha_3 = 6^3/_4$$

Analiza općenite jednadžbe trećega stupnja dat će nam slijedeće oznake kod riješavanja specijalne vrste tih jednačaba: Pošto je apsolutni član negativan, mora jednadžba imati na svaki način jedan negativan korijen, t. j. takav, koji će imati protivan predznak zadnjega člana. Pozitivnih korijena mora jednadžba imati dva, što svjedoči mijenjanje predznaka, koji neposredno slijede jedan za drugim u jednadžbi.

Riješimo li predjašnje jednadžbe, dobit ćemo slijedeće korijene:

$$k_1 = 2, \text{ i } k_{2,3} = 1 \pm \sqrt{5},$$

kao i

$$k_1 = 3, \text{ i } k_{2,3} = {}^3/_2 (-1 \pm \sqrt{3})$$

Ovi rezultati potvrdjuju takodjer spomenuto svojstvo korijena, koje se je moglo znati iz općenoga karaktera jednadžbe. Imademo u istinu jedan negativan i dva pozitivna korijena.

Ali od ovih vrijednosti imadu samo $k_1 = 2$, odnosno $k_1 = 3$ realnu vrijednost. Prva će vrijednost pripadati poligonu sa neizmjerno mnogo stranica, kao što to odgovara vrijednosti α_3 u toj jednadžbi; druga pak vrijednost pripada pravilnom trokutu, što takodjer uz α_3 pristaje.

Oba korijena $k_{2,3} = 1 \pm \sqrt{5}$ ne mogu odgovarati nikakvom realnom poligonu, jer je $k_2 = 1 + \sqrt{5}$ veći od 3, koju vrijednost dioni faktor nikad prekoračiti ne može, pošto je 3 njegov maksimum; $k_3 = 1 - \sqrt{5}$ je pako negativan, što opet dioni faktor na nikakav način biti ne može.

I slijedeće vrijednosti dionog faktora: $k_{2,3} = {}^3/_2 (-1 \pm \sqrt{3})$, ne mogu se pripisati nikakvom realnom poligonu. $k_2 = {}^3/_2 (-1 + \sqrt{3})$ manji je od 2, leži dakle ispod minimuma dionog faktora; a $k_3 = {}^3/_2 (-1 - \sqrt{3})$ negativan je, a kao takav ne može odgovarati realnom poligonu, kojemu pripadaju samo pozitivne vrijednosti dionog faktora.

Kvocijenat $\alpha_1 = \dfrac{U_n^2 + u_n^2}{U_{2n}^2 + u_{2n}^2}$ prelazi poslije supstitucije vrijednosti iz poglavja II. formule 22. i 23. u:

$$\alpha_1 = \frac{k^2[(k-1)^2+1]}{2(k-1)[3k-2]} = \frac{k^2[k^2-2k+2]}{2[3k^2-5k+2]} = \frac{k^4-2k^3+2k^2}{6k^2-10k+4} \quad 6)$$

Ovaj će česnik primiti za:

$$k = 2 \text{ vrijednost } \alpha_1 = 1, \text{ a za}$$
$$k = 3 \quad „ \quad \alpha_1 = {}^{45}/_{28}.$$

Kvocijenat α_1 primit će za druge dione faktore vrijednosti, koje su u slijedećoj skrižaljci složene:

n	α_1	n	α_1
3	1·607 142	200	1·000 039 991 63
10	1·124 918	400	1·000 007 727 457 14
20	1·003 201	600	1·000 003 475 415 65
30	1·001 394	900	1·000 001 500 109 20
40	1·000 778 75	1200	1·000 000 874 994 86
50	1·000 424 415 7	1800	1·000 000 190 000 714 4
60	1·000 343 538 6	2700	1·000 000 172 499 791 73
80	1·000 192 865 5	3600	1·000 000 112 499 912 0
90	1·000 152 961 68	5400	1·000 000 057 499 976 8
100	1·000 123 019 51		

Odnošaj za kvocijenat α_1 dovadja do općenite jednadžbe 4. stupnja:

$$k^4 - 2k^3 - 2(6\alpha_1 - 1)k^2 + 10\alpha_1 k - 4\alpha_1 = 0,$$

koja, za $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_1 = {}^{45}/_{28}$ specijalizirana, prelazi u obje slijedeće:

$$k^4 - 2k^3 - 4k^2 + 10k - 4 = 0$$

i

$$k^4 - 2k^3 - \frac{107}{14}k^2 + \frac{225}{14}k - \frac{45}{7} = 0$$

Podjimo sad do analize bikvadratičnih jednadžaba!

Jednadžba je parnoga stupnja, apsolutan joj je član negativan; ona ima dakle barem dva realna korijena, od kojih mora jedan pozitivan a drugi negativan biti. Pošto jednadžba parnoga stupnja mora imati paran broj realnih korijena, ali zadnji član jedino na taj način može postati negativan, da se realni pozitivni korijeni nalaze u neparnom broju, i to najmanje jedan od njih, to moraju i negativni korijeni u neparnom broju, dakle barem jedan od njih, postojati. U jednadžbi se tri put mijenjaju predznakovi kod dva neposredna člana, a jednom se isti opetuje, to opet jednadžbi mogu odgovarati najviše tri pozitivna i jedan negativan korijen.

*

Ako u jednadžbu supstituiramo mjesto k, $-k$, dobit ćemo:

$$f(-k) = k^4 + 2k^3 - 2(3\alpha_1 - 1)k^2 - 10\alpha_1 k - 4\alpha_1 = 0.$$

Ova jednadžba ima samo jednu mijenu predznaka, a po tom se znade, da ima samo jedan pozitivan korijen, odnosno, da prvobitna jednadžba $f(k)$ ima samo jedan negativan korijen, koji joj zaista pripada, kako smo to gore spomenuli bili.

Pošto znademo, da je $k=2$ korijen jednadžbe

$$k^4 - 2k^3 - 4k^2 + 10k - 4 = 0,$$

oslanjajući se na njen postanak, možemo ovu na Budan-ov način lako transformirati, i to:

	$+1$	-2	-4	$+10$	-4
2	1	0	-4	$+2$	,

što nas dovadja do kubične jednadžbe

$$k^3 - 4k + 2 = 0.$$

Analiziramo li ovu jednadžbu, vidjet ćemo, da ona mora imati jedan negativan i dva pozitivna korijena, što se u ostalom potpuno slaže sa analizom, koju smo kod bikvadratične jednadžbe postavili bili, ako uzmemo u obzir već nadjeni pozitivni korijen $k=2$.

Pošto korijeni kubične jednadžbe ne mogu realnom poligonu odgovarati, ne ćemo je niti razviti.

Jednadžba četvrtog stupnja:

$$k^4 - 2k^3 - \frac{107}{14}k^2 + \frac{225}{14}k - \frac{45}{7} = 0$$

dijeljiva je sa $k=3$, a kao kvocijenat te divizije dobit ćemo:

$$k^3 + k^2 - \frac{65}{14}k + \frac{15}{7} = 0;$$

dakle je $k=3$ korijen navedene bikvadratične jednadžbe, i kako se to slaže, odgovara isti dionom faktoru pravilnog trokuta.

Kad bismo i ovdje proveli analizu dobivene kubične jednadžbe, mogli bismo se osvjedočiti, da je razmatranje kod prvobitne bikvadratične jednadžbe posve dobro bilo.

Korijeni kubične jednadžbe nemaju nikakve praktične vrijednosti, pošto im vrijednosti leže izvan granica dionih faktora.

Promatrajmo sad kvocijenat: $\alpha_2 = \frac{U_n^2 + u_n^2}{U_{2n}^2 - u_{2n}^2}$, koji prima oblik:

$$\alpha_2 = \frac{k^2\,[k^2 - 2k + 2]}{2\,(k-1)\,(k-2)} = \frac{k^4 - 2k^3 + 2k^2}{2k^2 - 6k + 4} \qquad 7)$$

Ovaj će česnik dati granične vrijednosti, i to:

za $k = 2$ bit će $\alpha_2 = \infty$,

za $k = 3$ bit će $\alpha_2 = {}^{45}/_{4}$.

Za druge vrijednosti dionog faktora izaći će kvocijenti α_2, koji su poredani u slijedećoj skrižaljci:

n	α_2	n	α_2
3	11·25	200	30 776·9231
10	90·8321	400	129 457·8386
20	327·4493	600	280 583·5397
30	730·0166	900	666 666·3334
40	1 298·5926	1200	1 142 865·1429
50	2 023·9999	1800	2 483 862·6584
60	2 923·4500	2700	5 797 109·4493
80	5 199·4341	3600	7 281 822·9090
90	6 560·0000	5400	17 390 871·0435
100	8 171·2898		

Odnošaj izmedju dionog faktora k i kvocijenta α_2 izražen je jednadžbom četvrtoga stupnja:

$$k^4 - 2k^3 - 2\,(\alpha_2 - 1)\,k^2 + 6\alpha_2 k - 4\alpha_2 = 0.$$

Uvedemo li specijalne vrijednosti $\alpha_2 = \infty$, odnosno $\alpha_2 = \frac{45}{4}$ u ovu jednadžbu, dobit ćemo:

$$-2k^2 + 6k - 4 = 0, \text{ odnosno } k^2 - 3k + 2 = 0,$$

i $$k^4 - 2k^3 - \frac{41}{2}k^2 + \frac{135}{2}k - 45 = 0.$$

Prva od ovih jednadžaba ima za korijene:

$$k_{1,2} = {}^{3}/_{2} \pm {}^{1}/_{2} = \begin{cases} 2 \\ 1, \end{cases}$$

gdje opet $k = 2$ odgovara poligonu sa neizmjerno mnogo stranica, dok $k = 1$ ne može pripadati nikakvom realnom pravilnom poligonu.

Druga jednadžba daje, ako korijene za 3 umanjimo po Budan-ovoj metodi:

$$k^4 - 2k^3 - \frac{41}{2}k^2 + \frac{135}{2}k - 45 = 0$$

	1	-2	$-{}^{41}/_{2}$	$+{}^{135}/_{2}$	-45
3)	1	1	$-{}^{35}/_{2}$	$+15$	0 ,

što nas dovodi do kubične jednadžbe:

$$k^3 + k^2 - {}^{35}/_{2}\,k + 15 = 0,$$

pak nas ujedno uči, da je $k = 3$ korijen jednadžbe, kako se je to moglo predvidjeti. Ova vrijednost dionog faktora odgovara trokutu; daljni korijeni dobivene kubične jednadžbe imadu takve vrijednosti, koje ne odgovaraju nikakvom postojećemu pravilnom poligonu.

Kvocijenat $\alpha_4 = \dfrac{U_n^2 - u_n^2}{U_{2n}^2 + u_n^2}$ prelazi poslije supstitucije u:

$$\alpha_4 = \frac{k^3(k-2)}{2(k-1)(3k-2)} = \frac{k^4 - 2k^3}{2(3k^3 - 5k + 2)} = \frac{k^4 - 2k^3}{6k^2 - 10k + 4} \qquad 8)$$

Poslije uvedenja maksimalne vrijednosti dionog faktora $k = 3$, dobit ćemo za kvocijenat $\alpha_4 = \dfrac{27}{28}$, a za minimalne vrijednosti dionog faktora $k = 2$, dobit ćemo za kvocijenat $\alpha_4 = 0$.

Za druge vrijednosti dionog faktora sastavljeni su kvocijenti u slijedećoj skrižaljci:

n	α_4	n	α_4
3	0·607 142 8	200	0·000 129 972 91
10	0·050 942 115	400	0·000 030 901 204
20	0·012 434 057	600	0·000 013 900 165
30	0·005 502 321	900	0·000 006 000 062
40	0·003 077 440 2	1200	0·000 003 500 104
50	0·002 029 211 6	1800	0·000 003 109 991 231 8
60	0·001 369 589 8	2700	0·000 000 689 999 167 1
80	0·000 769 837 35	3600	0·000 000 449 999 647
90	0·000 610 098 59	5400	0·000 000 227 499 937
100	0·000 490 204 59		

Relacije izmedju k i α_4 bit će izražene u jednadžbi četvrtoga stupnja, koja je poredana po padajućim potencijama k:

$$k^4 - 2k^3 - 6\alpha_4 k^2 + 10\alpha_4 k - 4\alpha_4 = 0,$$

koja za vrijednosti $\varkappa_4 = 0$, odnosno $\varkappa_4 = \frac{27}{28}$ prelazi u:

$$\left.\begin{aligned} &k^3\,(k-2) = 0, \quad \text{i} \\ &k^4 - 2k^3 - \frac{81}{14}\,k^2 + {}^{135}/_{14}\,k - {}^{27}/_{7} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Prva od predjašnjih jednačaba ima korijene

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0, \quad \text{i} \quad k_4 = 2,$$

koja vrijednost predočuje dioni faktor za poligon sa neizmjerno mnogo stranica.

Druga jednadžba četvrtoga stupnja ima $k = 3$ za korijen, a daje poslije poznate transformacije kubičnu jednadžbu:

$$k^3 + k^2 - {}^{39}/_{14}\,k + {}^{9}/_{7} = 0,$$

koja ima takove korijene za k, da ne odgovaraju nikakvomu realnomu poligonu.

Za kvocijenat $\beta_1 = \frac{u_{2n}^2 + u_n^2}{U_n^2 - U_{2n}^2}$ dobit ćemo izraz:

$$\beta_1 = \frac{(3k-2)\,k}{(k-1)^2\,[k^2+4]} = \frac{3k^2 - 2k}{k^4 - 2k^3 + 5k^2 - 8k + 4}, \qquad 9)$$

koji poslije supstitucije maksimalne vrijednosti dionog faktora $k = 3$ prelazi u $\beta_1 = {}^{21}/_{52}$, dok minimalna vrijednost istoga $k = 2$ daje $\beta_1 = 1$.

Za dione faktore ostalih poligona dobit ćemo slijedeće u skrižaljci složene vrijednosti:

n	β_1	n	β_1
3	0·403 846	200	0·999 845 0
10	0·938 848	400	0·999 961 4
20	0·961 458	600	0·999 982 6
30	0·993 163	900	0·999 992 5
40	0·996 153	1200	0·999 994 5
50	0·997 6295	1800	0·999 996 48
60	0 998 3037	2700	0·999 999 15
80	0·998 5777	3600	0·999 999 45
90	0·999 2380	5400	0·999 999 72
100	0·999 3816		

Odnošaj izmedju k i β_1 bit će izražen gornjom, s obzirom na k poredanom jednadžbom četvrtoga stupnja:

$$k^4 - 2k^3 + \left(5 - \frac{3}{\beta_1}\right) k^2 - 2\left(4 - \frac{1}{\beta_1}\right) k + 4 = 0.$$

Supstituiramo li u ovu jednadžbu obje izračunane vrijednosti od β_1, primit će ona oblik:

$$\left.\begin{aligned} &\text{i to za } \beta_1 = 1, \quad k^4 - 2k^3 + 2k^2 - 6k + 4 = 0, \\ &\text{za } \beta_1 = {}^{21}/_{52}, \quad k^4 - 2k^3 - \frac{17}{7} k^2 - {}^{64}/_{21}\, k + 4 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Prva od predjašnjih jednačaba ima $k = 2$, a druga $k = 3$, kao moguće, realnom poligonu odgovarajuće korijene dionog faktora; obje jednadžbe dat će, ako im korijene za 2 odnosno 3 umanjimo, slijedeće kubične jednadžbe:

$$\left.\begin{aligned} &k^3 + 2k - 2 = 0 \\ &k^3 + k^2 + {}^{4}/_{7}\, k - {}^{28}/_{21} = 0 \end{aligned}\right\},$$

koje neimaju korijena, koji bi odgovarao konkretnom poligonu.

Slijedeći kvocijenat $\beta_2 = \dfrac{u_{2n}^2 + u_n^2}{U_n^2 - U_{2n}^2}$ dovodi do izraza:

$$\beta_2 = \frac{(3k-2)\,k}{(k-1)^2\,(k^2-4)} = \frac{3k^2 - 2k}{k^4 - 2k^3 - 3k^2 + 8k - 4}, \qquad 10)$$

koji se dade pisati u obliku bikvadratične jednadžbe, po potencijama od k poredane:

$$k^4 - 2k^3 - 3\left(1 + \frac{1}{\beta_2}\right) k^2 + 2\left(4 + \frac{1}{\beta_2}\right) k - 4 = 0.$$

Za osobite vrijednosti dionog faktora:

$$\begin{aligned} &k = 2 \quad \text{bit će} \quad \beta_2 = \infty, \\ &k = 3 \quad \text{bit će} \quad \beta_2 = {}^{21}/_{20}. \end{aligned}$$

Uvedemo li ove vrijednosti u jednadžbu četvrtoga stupnja i poredamo li je s obzirom na k, dobit ćemo:

$$\left.\begin{aligned} &k^4 - 2k^3 - 3k^2 + 8k - 4 = 0 \\ &k^4 - 2k^3 - \frac{123}{21} k^2 + \frac{208}{21} k - 4 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Ove jednadžbe imaju kao realne korijene $k = 2$, odnosno $k = 3$, kako to već samoj naravi stvari odgovara, i ako ih umanjimo za predjašnje vrijednosti korijena, prelaze one u obje kubične jednadžbe:

$$\left.\begin{aligned} k^3 - 3k + 2k &= 0 \\ k^3 + k^2 - {}^{60}/_{21}\, k + 4 &= 0 \end{aligned}\right\},$$

od kojih korijeni ne mogu pripadati realnim poligonima kao dioni faktori, o čem bismo se lako uvjeriti mogli, ako bismo jednadžbe po poznatim metodama iz nauke numeričkih jednačaba riješili.

Slijedeća skrižaljka daje kvocijenat $\wp_2$ za različite krugu pripadne poligone:

n	$\wp_2$	n	$\wp_2$
3	1·05	200	14 287·85 81
10	36·8980	400	64 663·0699
20	158·8591	600	143 877·0412
30	361·9807	900	333 335·8333
40	645·1064	1200	571 430·3571
50	959·4103	1800	888 889·5642
60	1457 5678	2700	2797 205·2071
80	2593·8760	3600	4444 446·9440
90	3274·4791	5400	8696 306·8485
100	3699·0762		

Treći kvocijenat u grupi $\wp$ prima oblik:

$$\wp_3 = \frac{u_{2n}^2 - u_n^2}{U_n^2 - U_{2n}^2} = \frac{k}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{k}{k^3 - 3k + 2} \quad 11)$$

Poslije supstitucije maksimuma i minimuma dionog faktora k dobit ćemo za kvocijenat

$${}^3/_{20}, \text{ odnosno } {}^1/_2.$$

Kvocijenti za druge poligone slijedit će iz slijedeće skrižaljke, u koju možemo argumentom n odnosno k unići:

n	β_3	n	β_3
3	0·166̇	200	0·499 900 05
10	0·458 045	400	0·499 972 939 8
20	0·489 283 8	600	0·499 980 019 8
30	0·495 246 4	900	0·499 994 750 4
40	0·497 337 8	1200	0·499 996 937 5
50	0·498 297 4	1800	0·499 998 591 5
60	0·498 798 6	2700	0·499 999 396 5
80	0·499 327 05	3600	0·499 999 527 8
90	0·499 466 75	5400	0·499 999 799 1
100	0·499 571 75		

Jednadžba izmedju β_3 i k, koja se u predjašnjem slučaju reducira na jednadžbu trećega stupnja, glasi u općenitom obliku:

$$k^3 - \left(3 + \frac{1}{\beta_3}\right) k + 2 = 0.$$

Ona će, uvedemo li u nju gornje specijalne vrijednosti, koje odgovaraju granicama dionog faktora, primiti oblik:

$$\left.\begin{aligned} k^3 - {}^{39}/_8\, k + 2 &= 0 \\ k^3 - 5k - 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Samo $k = 3$ i $k = 2$ jesu korijeni predjašnjih jednačaba, koji odgovaraju u istinu postojećim poligonima. Transformiramo li obje jednadžbe Budan-ovim postupkom, s obzirom na ta dva korijena, prijeći će ona u kvadratične jednadžbe:

$$\left.\begin{aligned} k^2 + 2k - 1 &= 0 \\ k^2 + 3k - {}^2/_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Korijeni obiju jednačaba, naime:

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ odnosno } k = \frac{-9 \pm \sqrt{105}}{6},$$

jesu vrijednosti, koje ne mogu nikako pripadati realnomu poligonu.

Kvocijenat $\beta_4 = \dfrac{u_{2n}^2 - u_n^2}{U_n^2 + U_{2n}^2}$ dobit će poslije izvedene supstitucije oblik:

$$\beta_4 = \frac{(k-2)\,k}{(k-1)^2\,(k^2+4)} = \frac{k^2-2k}{k^4-2k^3+5k^2-8k+4} \qquad 12)$$

Poredamo li jednadžbu s obzirom na k, možemo pisati:

$$k^4 - 2k^3 + \left(5 - \frac{1}{\beta_4}\right) k^2 - 2\left(4 - \frac{1}{\beta_4}\right) k + 4 = 0.$$

Ekstremne vrijednosti kvocijenta β_4 bit će:

$$\text{za} \quad k = 3, \quad \beta_4 = {}^3/_{52},$$
$$\text{za} \quad k = 2, \quad \beta_4 = 0.$$

Za druge poligone dobit ćemo vrijednosti kvocijenata iz slijedeće skrižaljke:

n	β_4	n	β_4
3	0·057 692 305 8	200	0·000 029 992 503
10	0·011 632 135 1	400	0·000 007 719 003 7812
20	0·003 038 712 6	600	0·000 003 474 879 2465
30	0·001 362 888 3	900	0·000 001 498 753 5248
40	0·000 767 740 92	1200	0·000 000 874 992 3437
50	0·000 492 657 41	1800	0·000 000 402 499 0262
60	0·000 341 591 62	2700	0·000 000 172 444 7027
80	0·000 192 203 88	3600	0·000 000 112 499 8730
90	0·000 152 314 08	5400	0·000 000 057 499 9749
100	0·000 122 380 02		

Općenita bikvadratična jednadžba prijeći će poslije supstitucije specijalnih vrijednosti $k = 3$ i $k = 2$ u:

$$\left.\begin{aligned} k^4 - 2k^3 - \frac{37}{3}\,k^2 + \frac{80}{3}\,k + 4 = 0 \\ k^2 - 2k = 0 \end{aligned}\right\}$$

Prva od obiju jednačaba ima za korijen $k = 3$, a ovaj odgovara takodjer pravilnom trokutu, koji opet pripada kvocijentu $\beta_4 = {}^3/_{52}$. Transformiramo li tu jednadžbu tako, da uklonimo iz nje korijen $k = 3$, dobit ćemo kubičnu jednadžbu:

$$k^3 + k^2 - \frac{28}{3}\,k - \frac{4}{3} = 0,$$

a njezini korijeni ne odgovaraju nikakvomu realnomu poligonu.

Druga od gornjih jednačaba ima kao korijene vrijednosti $k = 2$ i $k = 0$, od kojih prva odgovara poligonu sa neizmjerno mnogo stranica i ujedno realno riješenje prikazuje, dok druga vrijednost ne može biti od važnosti za nikakov poligon.

Podjimo sad još do razmatranja kvocijenata zadnje grupe:

$$\gamma_1 = \frac{U_{2n}^2 + u_n^2}{U_n^2 + u_{2n}^2} = \frac{4(k-1)^2 + k^2}{k(k-1)[k(k-1)+2]} = \ldots$$

$$= \frac{5k^2 - 8k + 4}{k^4 - 2k^3 + 3k^2 - 2k} \qquad 13)$$

Poredamo li taj izraz s obzirom na k, dobit ćemo jednadžbu

$$k^4 - 2k^3 + \left(3 - \frac{5}{\gamma_1}\right) k^2 - 2\left(1 - \frac{4}{\gamma_1}\right) k - \frac{4}{\gamma_1} = 0,$$

koja je četvrtoga stupnja pogledom na k.

Osobite vrijednosti dobit ćemo za navedeni kvocijenat, ako mjesto k njegovu minimalnu odnosno maksimalnu vrijednost uvrstimo u gornjoj jednadžbi.

Dobit ćemo: za $k = 2$, $\gamma_1 = 1$
za $k = 3$, $\gamma_1 = {}^{25}/_{48}$

Ove vrijednosti odgovaraju poligonu sa neizmjerno mnogo stranica, odnosno pravilnom trokutu.

Za druge pravilne poligone možemo vrijednost kvocijenta iz slijedeće skrižaljke naći:

n	γ_1	n	γ_1
3	0·510 204 081	200	0·999 900 00
10	0·984 638 54	400	0·999 968 31
20	0·990 954 01	600	0·999 976 46
30	0·995 873 68	900	0·999 994 01
40	0·997 687 01	1200	0·999 997 50
50	0·998 466 42	1800	0·999 997 88
60	0·998 847 61	2700	0·999 999 483
80	0·999 422 90	3600	0·999 999 663
90	0·999 542 53	5400	0·999 999 983
100	0·999 644 79		

Supstituiramo li mjesto γ_1 njegovu vrijednost u općenitu postavljenu jednadžbu četvrtoga stupnja s obzirom na k, dobit ćemo obje specijalne jednadžbe:

$$\left.\begin{aligned} &k^4 - 2k^3 - 2k^2 + 6k - 4 = 0 \\ &k^4 - 2k^3 - \frac{165}{25}k^2 + \frac{334}{25}k - \frac{192}{25} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Korijeni ovih jednačaba, koji će uz to odgovarati u istinu postojećim realnim poligonima, bit će $k = 2$ za prvu i $k = 3$ za drugu jednadžbu.

Eliminiramo li obim jednadžbama oba korijena Budan-ovim postupkom, dobit ćemo slijedeće kubične jednadžbe:

$$\left.\begin{aligned} &k^3 - 2k + 2 = 0 \\ &k^3 + k^2 - \frac{90}{25}k + \frac{64}{25} = 0 \end{aligned}\right\}$$

od kojih korijeni ne mogu biti od važnosti za ikakav realni poligon.

Kvocijenat $\gamma_2 = \dfrac{U_{2n}^2 + u_n^2}{U_n^2 + u_{2n}^2}$ primit će slijedeći oblik, uvedemo li u nj vrijednosti za periferije:

$$\gamma_2 = \frac{4(k-1)^2 + k^2}{k(k-1)[k(k-1) - 2]} = \frac{5k^2 - 8k + 4}{4k^3 - 6k^2 - 2k + 2} \qquad 14)$$

što se dade takodjer pisati u obliku:

$$k^4 \quad 2k^3 - \left(1 + \frac{5}{\gamma_2}\right)k^2 + 2\left(1 + \frac{4}{\gamma_2}\right)k - \frac{4}{\gamma_2} = 0,$$

ako poredamo jednadžbu po potencama faktora k.

Kvocijenat γ_2 primit će za maksimalnu i minimalnu vrijednost dionog faktora osobite vrijednosti, i to:

$$\text{za } k = 2 \text{ bit će } \gamma_2 = \infty,$$
$$\text{a za } k = 3 \text{ bit će } \gamma_2 = {}^{25}/_{24}.$$

Vrijednost kvocijenta γ_2 za neke druge, izim spomenutih specijalnih poligona $n = 3$ i $n = \infty$, mogu se iz slijedeće skrižaljke izvaditi:

n	γ_2	n	γ_2
3	1·041 6	200	10 001·800 01
10	33·102 4	400	43 146·585 67
20	106·572 8	600	95 920·660 90
30	344·800 9	900	222 224·222 22
40	436·457 8	1200	470 590·705 91
50	650·858 28	1800	686 108·000 35
60	972·597 63	2700	1 568 629·076 01
80	1730·977 55	3600	2 962 982·962 98
90	2194·205 16	5400	5 797 101·650 14
100	2715·070 00		

Supstituiramo li gornje vrijednosti u općenitu jednadžbu četvrtoga stupnja, poredanu s obzirom na k, dobit ćemo specijalne jednadžbe:

$$\left.\begin{aligned} &k^4 - 2k^3 - k^2 + 2k = 0, \\ &k^4 - 2k^3 - \frac{145}{25}k^2 + \frac{242}{25}k - \frac{96}{25} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Prva od ovih jednačaba ima za korijene:

$$\left\{\begin{aligned} k_1 &= 0, \\ k_2 &= 2, \\ k_3 &= +1, \\ k_4 &= -1, \end{aligned}\right.$$

od kojih jedino $k_2 = 2$ odgovara realnom poligonu. Druga od tih specijalnih jednačaba ima za korijen $k = 3$, koji pripada pravilnom trokutu, i uklonimo li taj korijen iz jednadžbe, dobit ćemo jednadžbu trećega stupnja:

$$k^3 + k^2 - \frac{70}{25}k + \frac{32}{25} = 0,$$

a njezini korijeni ne mogu zadovoljavati nikakvomu realnomu poligonu.

Za treći kvocijenat ove grupe dobit ćemo:

$$\gamma_3 = \frac{U_{2n}^2 - u_n^2}{U_n^2 - u_{2n}^2} = \frac{3k^2 - 8k + 4}{k^4 - 2k^3 + k^2 + 2k}, \qquad 15)$$

koji nas dovodi do jednadžbe četvrtoga stupnja:

$$k^4 - 2k^3 - \left(1 + \frac{3}{\gamma_3}\right)k^2 + 2\left(1 + \frac{4}{\gamma_3}\right)k - \frac{4}{\gamma_3} = 0.$$

Za osobite vrijednosti dionog faktora $k = 2$, odnosno $k = 3$, dobit ćemo:

$$\gamma_3 = \frac{0}{0}, \text{ odnosno } \gamma_3 = \frac{7}{24}.$$

Da uklonimo neodredjeni oblik od γ_3 za $k = 2$, postupat ćemo na poznati način za neodredjeni oblik $\frac{0}{0}$.

Postavimo $\gamma_3 = \frac{f(k)}{F(k)} = \frac{3k^2 - 8k + 4}{k^4 - 2k^3 + k^2 + 2k}$ i tvorimo prvi diferencijalni kvocijenat u brojniku i u nazivniku, što će nam dati:

$$\gamma_3 = \frac{f'(k)}{F'(k)} = \frac{6k - 8}{4k^3 - 6k^2 + 2k + 2} = \frac{3k - 4}{2k^3 - 3k^2 + k + 1},$$

koji će izraz, supstituiramo li u nj $k = 2$, dati željenu vrijednost kvocijenta, naime $\gamma_3 = {}^2/_3$.

Vrijednosti kvocijenta za druge dione faktore nalaze se navedene u ovoj skrižaljci:

n	γ_3	n	γ_3
3	1·428 571	200	0·000 054 984 605
10	0·024 967 25	400	0·000 015 435 938 823
20	0·006 102 797 8	600	0·000 006 949 782 651
30	0·002 745 246 0	900	0·000 002 999 970 625
40	0·001 544 742 5	1200	0·000 001 749 976 002
50	0·000 987 045 6	1800	0·000 000 804 999 587 65
60	0·000 683 430 5	2700	0·000 000 384 999 848 75
80	0·000 384 459 8	3600	0·000 000 224 999 848 75
90	0·000 304 846 1	5400	0·000 000 121 249 912 51
100	0·000 232 454 15		

Umetnemo li mjesto k obje specijalne vrijednosti kvocijenta γ_3, naime $\gamma_3 = {}^2/_3$ i $\gamma_3 = {}^7/_{24}$ u općenitu jednadžbu četvrtoga stupnja, dobit ćemo slijedeće dvije specijalne jednadžbe:

$$\left.\begin{aligned} k^4 - 2k^3 - \frac{11}{2}k^2 + 14k - 6 &= 0, \\ k^4 - 2k^3 - \frac{79}{7}k^2 + \frac{206}{7}k - \frac{96}{7} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Prva od ovih jednačaba ima $k = 2$, a druga $k = 3$ kao korijene, koji odgovaraju konkretnim slučajevima pravilnih poligona.

Eliminiramo li oba korijena iz obiju jednadžaba po poznatom načinu, doći ćemo do dvije jednadžbe trećega stupnja:

$$\left.\begin{aligned} k^3 - \frac{11}{2}k + 3 &= 0 \\ k^3 + k^2 - \frac{58}{7}k + \frac{32}{7} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

od kojih se korijeni ne nalaze unutar granica, koje može primiti dioni faktor k; ne mogu dakle prikazivati realna riješenja.

Četvrti kvocijenat

$$\gamma_4 = \frac{U_{2n}^2 - u_n^2}{U_n^2 + u_{2n}^2} = \frac{3k^2 - 8k + 4}{k^4 - 2k^3 + 2k^2 - 2k} \qquad 16)$$

dovodi do jednadžbe četvrtoga stupnja:

$$k^4 - 2k^3 + 3\left(1 - \frac{1}{\gamma_4}\right)k^2 - 2\left(1 - \frac{4}{\gamma_4}\right)k - \frac{4}{\gamma_4} = 0,$$

koju smo obzirom na k poredali.

Osobite vrijednosti kvocijenta, koje odgovaraju specijalnim vrijednostima dionog faktora $k = 2$ i $k = 3$, jesu:

$$\gamma_4 = 0, \text{ odnosno } \gamma_4 = {}^7/_{48}.$$

Za ove osobite vrijednosti γ_4 prijeći će gornja općena jednadžba za k u obje slijedeće:

$$\left.\begin{aligned} 3k^4 - 8k + 4 &= 0 \\ k^4 - 2k^3 - \frac{123}{7}k^2 + \frac{370}{7}k - \frac{192}{7} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Korijeni prve jednadžbe jesu:

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{3} = \begin{cases} 2 \\ {}^2/_3 \end{cases},$$

od kojih jedino $k = 2$ može biti traženi rezultat.

Druga se jednadžba dade pisati i u slijedećem obliku:

$$k^4 - 2k^3 - \frac{123}{7}k^2 + \frac{370}{7}k - \frac{192}{7} =$$

$$= (k-3)\left(k^3 + k^2 - \frac{102}{7}k + \frac{64}{7}\right) = 0$$

i ima dakle $k = 3$ kao svoj korijen, koji ujedno prikazuje traženo riješenje; korijeni drugoga faktora ne mogu nikako do mogućeg riješenja dovoditi.

Vrijednost kvocijenta za neke druge, nego li one gore upotrijebljene dione faktore, može se iz slijedeće skrižaljke uzeti:

n	γ_4	n	γ_4
3	1·428 571 429	200	0·000 052 490 675
10	0·023 883 146	400	0·000 015 428 734 41
20	0·006 126 567	600	0·000 006 949 782 65
30	0·002 738 747 7	900	0·000 002 999 959 63
40	0·001 544 492 5	1200	0·000 001 789 988 25
50	0·000 989 013 85	1800	0·000 000 804 995 876 5
60	0·000 604 237 085	2700	0·000 000 344 999 403 5
80	0·000 384 335 375	3600	0·000 000 224 999 881 25
90	0·000 304 72[illegible] 1125	5400	0·000 000 121 249 997 375
100	0·000 232 259 1625		

Radi pregleda, kao i radi daljne izradbe, složili smo dobivene rezultate pojedinih kvocijenata u slijedećoj skrižaljci:

Kvocijenat	Dioni faktor k		Kvocijenat	Dioni faktor k		Kvocijenat	Dioni faktor k	
a	$n=\infty\ 2$	$n=3\ 3$	b	$n=\infty\ 2$	$n=3\ 3$	c	$n=\infty\ 2$	$n=3\ 3$
a_1	1	$^{15}/_{4}$	b_1	1	$^{9}/_{20}$	c_1	1	$^{11}/_{18}$
a_2	∞	$^{15}/_{2}$	b_2	∞	$^{9}/_{4}$	c_2	∞	$^{11}/_{6}$
a_3	4	$^{9}/_{2}$	b_3	2	$^{3}/_{4}$	c_3	$^{3}/_{2}$	$^{5}/_{6}$
a_4	0	$^{9}/_{14}$	b_4	0	$^{3}/_{20}$	c_4	0	$^{5}/_{18}$

Odavle se vidi jasno, da se za pravilni trokut, krugu upisan, dadu postaviti stanoviti odnošaji.

Za kvocijente a dobit ćemo:

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1}{7} \\ a_4 &= \frac{a_3}{7} \end{aligned}\right\}, \text{ odatle } \frac{a_2}{a_4} = \frac{a_1}{a_3}, \text{ ili } a_1 a_4 = a_2 a_3.$$

Isto tako za b, odnosno c:

$$\left.\begin{aligned} b_2 &= \frac{b_1}{5} \\ b_4 &= \frac{b_3}{5} \end{aligned}\right\}, \text{ odatle } \frac{b_2}{b_4} = \frac{b_1}{b_3}, \text{ ili } b_1 b_4 = b_2 b_3.$$

$$\left.\begin{aligned} c_2 &= \frac{c_1}{3} \\ c_4 &= \frac{c_3}{3} \end{aligned}\right\}, \text{ odatle } \frac{c_2}{c_4} = \frac{c_1}{c_3}, \text{ ili } c_1 c_4 = c_2 c_3.$$

Za poligon sa neizmjerno mnogo stranica postoje relacije:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_3}{4} \\ a_2 &= \frac{1}{a_4} \end{aligned}\right\}, \text{ ili } \left\{\begin{aligned} a_3 &= 4a_1 \\ a_2 a_4 &= 1. \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \frac{b_3}{2} \\ b_2 &= \frac{1}{b_4} \end{aligned}\right\}, \text{ ili } \left\{\begin{aligned} b_3 &= 2b_1 \\ b_2 b_4 &= 1. \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{2}{3c_3} \\ c_2 &= \frac{1}{c_4} \end{aligned}\right\}, \text{ ili } \left\{\begin{aligned} 3c_1 &= 2c_3 \\ c_2 c_4 &= 1. \end{aligned}\right.$$

Vrijednosti su kvocijenata za periferije u slijedećoj skrižaljci složene:

Kvocijenat α	Dioni faktor k		Kvocijenat β	Dioni faktor k		Kvocijenat γ	Dioni faktor k	
	$n=\infty$ 2	$n=3$ 3		$n=\infty$ 2	$n=3$ 3		$n=\infty$ 2	$n=3$ 3
α_1	1	$^{45}/_{28}$	β_1	1	$^{2}/_{52}$	γ_1	1	$^{25}/_{48}$
α_2	∞	$^{45}/_{4}$	β_2	∞	$^{21}/_{20}$	γ_2	∞	$^{25}/_{24}$
α_3	4	$^{27}/_{4}$	β_3	$^{1}/_{2}$	$^{3}/_{20}$	γ_3	$^{2}/_{3}$	$^{7}/_{24}$
α_4	0	$^{27}/_{8}$	β_4	0	$^{3}/_{52}$	γ_4	0	$^{7}/_{48}$

Za kvocijente pravilnog trokuta, krugu upisana, možemo s mjesta napisati slijedeće relacije:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{\alpha_1}{7} \\ \alpha_3 &= \frac{\alpha_4}{2} \end{aligned}\right\}, \text{ odakle slijedi } 7\,\alpha_2\,\alpha_4 = 2\,\alpha_1\,\alpha_3;$$

nadalje

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= 7\beta_4 \\ \beta_3 &= 7\beta_2 \end{aligned}\right\}, \text{ odakle slijedi } \frac{\beta_1}{\beta_3} = \frac{\beta_4}{\beta_2}, \text{ ili } \beta_1\,\beta_2 = \beta_3\,\beta_4;$$

i napokon

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\gamma_2}{2} \\ \gamma_4 &= \frac{\gamma_3}{2} \end{aligned}\right\}, \text{ odakle slijedi } \frac{\gamma_1}{\gamma_4} = \frac{\gamma_2}{\gamma_3}, \text{ ili } \gamma_1\,\gamma_3 = \gamma_2\,\gamma_4.$$

Analogno će biti za poligon sa neizmjerno mnogo stranica:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= 4\alpha_3 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{\alpha_4} \end{aligned}\right\}, \text{ ili } \left\{\begin{aligned} &\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = 4 \\ &\alpha_1\,\alpha_4 = 1. \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= 2\beta_3 \\ \beta_2 &= \frac{1}{\beta_4} \end{aligned}\right\}, \text{ ili } \left\{\begin{aligned} &\frac{\beta_1}{\beta_3} = 2 \\ &\beta_2\,\beta_4 = 1. \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{3}{2\gamma_3} \\ \gamma_2 &= \frac{1}{\gamma_4} \end{aligned}\right\}, \text{ ili } \left\{\begin{aligned} &\frac{\gamma_1}{\gamma_3} = {}^3/_2 \\ &\gamma_2\,\gamma_4 = 1. \end{aligned}\right.$$

Istraživanja o dionom faktoru, kao i njegovu upotrebu kod raznih problema nauke o krugu, predjašnjim smo razmatranjima djelomično rastumačili. Uvjereni smo, da će ovaj omjerni broj biti prilično znatan kod svih zadaća, koje se kruga tiču.

U jednoj daljnoj raspravi razložit ćemo znatnost dionog faktora za izračunanje broja π, i doći ćemo tim opet do vrlo interesantnih odnošaja.

Kvocijenti učinjeni iz kvadratâ periferijâ.

Kvocijenat	Algebrajski izraz kvocijenta
α_1	$\frac{k^2(k^2-2k+2)}{2(3k^2-10k+2)} = \frac{k^4-2k^3+2k^2}{6k^2-10k+4}$
α_2	$\frac{k^2(k^2-2k+2)}{2(k-1)(k-2)} = \frac{k^4-2k^3+2k^2}{2k^2-6k+4}$
α_3	$\frac{k^3}{2(k-1)} = \frac{k^3}{2k-2}$
α_4	$\frac{k^3(k-2)}{2(k-1)(3k-2)} = \frac{k^4-2k^3}{6k^2-10k+4}$
β_1	$\frac{k(3k-2)}{(k^2+4)(k-1)^2} = \frac{3k^2-2k}{k^4-2k^3+5k^2-8k+4}$
β_2	$\frac{k(3k-2)}{(k-1)^2(k^2-4)} = \frac{3k^2-2k}{k^4-2k^3+3k^2+8k-4}$
β_3	$\frac{k}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{k}{k^3-3k+2}$
β_4	$\frac{k(k-2)}{(k-1)^2(k^2+4)} = \frac{k^2-2k}{k^4-2k^3+5k^2-8k+4}$
γ_1	$\frac{k^2+4(k-1)^2}{k(k-1)[k(k-1)+2]} = \frac{5k^2-8k+4}{k^4-2k^3+3k^2-2k}$
γ_2	$\frac{k^2+4(k-1)^2}{k(k-1)[-2+k(k-1)]} = \frac{5k^2-8k+4}{4k^3-6k^2-2k+2}$
γ_3	$\frac{4(k-1)^2-k^2}{k(k-1)[k(k-1)-2]} = \frac{3k^2-8k+4}{k^4-2k^3-3k^2+2k}$
γ_4	$\frac{4(k-1)^2-k^2}{k(k-1)[k(k-1)+2]} = \frac{3k^2-8k+4}{k^4-2k^3+2k^2-2k}$

Kvocijenti učinjeni iz plohâ.

Kvocijenat	Algebrajski izraz kvocijenta
a_1	$\frac{k^3 - 2k^2 + 2k}{3k^2 - 5k + 2}$
a_2	$\frac{k(k^2 - 2k + 2)}{(k-1)(k-2)} = \frac{k^3 - 2k^2 + 2k}{k^2 - 3k + 2}$
a_3	$\frac{k^2}{k - 1}$
a_4	$\frac{k(k^2 - 2k - 2)}{(k-1)(3k-2)} = \frac{k^3 - 2k^2 - 2k}{3k^2 - 5k + 2}$
b_1	$\frac{k^2}{(k-1)^2(2+k)} = \frac{k^2}{k^3 - 3k + 2}$
b_2	$\frac{k^2}{(k-1)^2(k-2)} = \frac{k^2}{k^3 - 4k^2 + 5k - 2}$
b_3	$\frac{k}{(k-1)^2}$
b_4	$\frac{k(k-2)}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{k^2 - 2k}{k^3 - 3k + 2}$
c_1	$\frac{k + 2(k-1)^2}{k^2(k-1)} = \frac{2k^2 - 3k + 2}{k^3 - k^2}$
c_2	$\frac{k + 2(k-1)^2}{k(k-1)(k-2)} = \frac{2k^2 - 3k + 2}{k^3 - 3k^2 + 2k}$
c_3	$\frac{-k + 2(k-1)^2}{k(k-1)(k-2)} = \frac{k^2 - 3k + 2}{k^3 - 3k^2 + 2k}$
c_4	$\frac{2(k-1)^2 - k}{k^2(k-1)} = \frac{2k^2 - 3k + 2}{k^3 - k^2}$

Sastav odrednih jednačaba dionog faktora k za razne kvocijente.

Kvocijenat	Jednadžba za dioni faktor, ako je ona:	
	II. stupnja	III. stupnja
a_1		$k^3 (2+3a_1) k^2 + (2+5a_1) k - 2a_1 = 0$
a_2		$k^3 - (2+a_2) k^2 + (2+3a_2) k - 2a_2 = 0$
a_3	$k^2 - a_3 k + a_3 = 0$	
a_4		$k^3 - (2+3a_4) k^2 + 5a_4 k - 2a_4 = 0$
b_1		$k^3 - \frac{1}{b_1} k^2 - 3k + 2 = 0$
b_2		$k^3 - \left(4 + \frac{1}{b_2}\right) k^2 + 5k - 2 = 0$
b_3	$k^2 - \left(2 + \frac{1}{b_3}\right) k + 1 = 0$	
b_4		$k^3 - \frac{1}{b_4} k^2 + \left(-3 + \frac{2}{b_4}\right) k + 2 = 0$
c_1		$k^3 - \left(1 + \frac{2}{c_1}\right) k^2 + \frac{2}{c_1} k - 2 = 0$
c_2		$k^3 - \left(3 + \frac{2}{c_2}\right) k^2 + \left(2 + \frac{3}{c_2}\right) k - \frac{2}{c_2} = 0$
c_3		$k^3 - \left(3 + \frac{2}{c_3}\right) k^2 + \left(2 + \frac{5}{c_3}\right) k - \frac{2}{c_3} = 0$
c_4		$k^3 - \left(1 + \frac{2}{c_4}\right) k^2 + \frac{5}{c_4} k - \frac{2}{c_4} = 0$

Kvocijenat	Jednadžba za dioni faktor, ako je ona:	
	III. stupnja	IV. stupnja
α_1		$k^4 - 2k^3 - 2(6\alpha_1 - 1) k^2 + 10\alpha_1 k - 4\alpha_1 = 0$
α_2		$k^4 - 2k^3 - 2(\alpha_2 - 1) k^2 + 6\alpha_2 k - 4\alpha_2 = 0$
α_3	$k^3 - 2\alpha_3 k + 2\alpha_3 = 0$	
α_4		$k^4 - 2k^3 - 6\alpha_4 k^2 + 10\alpha_4 k - 4\alpha_4 = 0$
β_1		$k^4 - 2k^3 + \left(5 - \frac{3}{\beta_1}\right) k^2 - 2\left(4 - \frac{1}{\beta_1}\right) k + 4 = 0$
β_2		$k^4 - 2k^3 - 3\left(1 + \frac{1}{\beta_2}\right) k^2 + 2\left(4 + \frac{1}{\beta_2}\right) k - 4 = 0$
β_3	$k^3 - \left(3 + \frac{1}{\beta_3}\right) k + 2 = 0$	
β_4		$k^4 - 2k^3 + \left(5 - \frac{1}{\beta_4}\right) k^2 - 2\left(4 + \frac{1}{\beta_4}\right) k + 4 = 0$
γ_1		$k^4 - 2k^3 + \left(3 - \frac{5}{\gamma_1}\right) k^2 - 2\left(1 - \frac{4}{\gamma_1}\right) k - \frac{4}{\gamma_1} = 0$
γ_2		$k^4 - 2k^3 - \left(1 + \frac{5}{\gamma_2}\right) k^2 + 2\left(1 + \frac{4}{\gamma_2}\right) k - \frac{4}{\gamma_2} = 0$
γ_3		$k^4 - 2k^3 - \left(1 + \frac{3}{\gamma_3}\right) k^2 + 2\left(1 + \frac{4}{\gamma_3}\right) k - \frac{4}{\gamma_3} = 0$
γ_4		$k^4 - 2k^3 + 3\left(1 - \frac{1}{\gamma_4}\right) k^2 - 2\left(1 - \frac{4}{\gamma_4}\right) k - \frac{4}{\gamma_4} = 0$

Četrnajsto potresno izvješće: za god. 1896.

SASTAVIO PRAVI ČLAN DR. M. KIŠPATIĆ.

Predano u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 28. travnja 1898.

7. *veljače* nekoliko minuta iza 8 s. prije podne u *Senju* osjetiše dosta jak potres, koji je trajao 3 - 4 sekunde. Gibanje je bilo valovito. (F. Dobiaš.)

27. *veljače* u $9^1/_4$ s prije podne u *Mostaru* prilično jak potres, koji je trajao 3 sekunde i išao smjerom od J—S. („Obzor".)

---

17. *ožujka* u $10^1/_4$ s. po podne na *Rieci* lagan potres, koji se je širio u pravcu od Rieke prama Opatiji. Na Rieci osjetilo je potres samo malo ljudi. U Volovskom bio je potres dosta jak i pratila ga je podzemna tutnjava. („Nar. Nov.")

25. *ožujka* u 3 s. prije podne u *Dubrovniku* slab potres, koji je prilično dugo trajao. („Hrv. Domovina.")

U *Mostaru*, *Ljubinju*, *Trebinju* i *Gackom* u 2 s. 30 m. prije podne kratak, no dosta žestok potres, iza kojeg je sliedio drugi, slabiji. Pravac potresu bio je od JZ—SI. („Obzor.")

---

6. *travnja* oko $7^1/_4$ po podne u *Banjaluci* dosta jak, okomit potres u pravcu od SI—JZ. Udarac bio je žestok i potrajao je zajedno sa tutnjavom do 4 sekunde. U kućah se pokazaše neznatne pukotine a i sa stropova padao je zamaz. (I. Tominac.) — U *Banjaluci* u 7 s. 5 min. po podne jak potres, koji je trajao 3 sekunde. („Obzor.")

Isti dan u 11 s. po podne u *Banjaluci* valovit potres od SI—JZ. (I. Tominac.)

24. *svibnja* u 6 s. 45 m. prije podne u *Dubrovniku* lagan potres, koji je potrajao 2 sekunde (Mojsisovics: Mittheilungen der Erdbebencommission, Sitzungsberichte der k. Akad. Wien 1897, I. p. 41.)

25. *svibnja* u 2 s. 10 m. po podne u *Pakracu* jedan vrlo slab udarac, koji je jedva 1 sekundu potrajao. Izvjestitelju se pričinilo, kao da je netko odozdol podigao naslonjač, na kom je ležao. Pravac se nije mogao ustanoviti. (Lj. Stein.)

---

10. *lipnja* u 10 s. 50 m. po podne u *Trebinju*, *Ljubinju*, *Ljubuškom*, *Bileću*, *Novom Bileću* i u *Mostaru* osjetiše žestok valovit potres, koji je išao u pravcu od JZ—SI i trajao 5 sekunda. Isti potres osjetiše u isto doba i u *Sarajevu* osobito po viših dielovih grada. („Hrv. Dom.“) — „Obzor“ javlja, da su 10. lipnja u 11 s. po podne osjetili u *Dubrovniku* i okolici dosta jak potres, koji je trajao samo 2 sekunde. — *Cetinje*, isti dan dva jaka valovita potresa uz podzemnu tutnjavu (Mojsisovics, Mitth. p. 41.) — *Kotor*, u 10 s. 50 m. po podne jaka valovita trešnja, koja je trajala 8 sekunda, te imala smjer od SZ—JI. Drugi izvjestitelj javlja, da je potres trajao 1 sekundu, da je bio vrlo slab, valovit, i da je išao od S—J. Izvjestitelj je ležao u postelji, te je potres jasno razabrao. Vrata i ormari zaškripaše. Ptice se u krletkah uznemiriše. Odmah iza potresa nastala je huka u zraku. Na moru osjetiše gibanje posve dobro, kako je to pripoviedao zapovjednik carskog broda „Narenta“ u *Tivtu*.

---

15. *srpnja* u *Jajcu*, *Travniku* i *Kuprešu* valovit potres, koji se je

16. *srpnja* u jutro ponovio („Obzor.“)

16. *srpnja* u 6 s. 50 m. prije podne u *Grižanih* valovit potres, da su se postelje zaljuljale. Smjer potresa bio je od SZ—JI., a trajao je 3 sekunde. (Pavelić žup.)

17. *srpnja* u 6 s. 20 m. po podne u *Novom* 4 sekunde trajući potres sa jakom podzemnom tutnjavom i udarcem, kao da je nešto prasnulo. (S. Pammer.) — *Grižane*, u 6 s. 20 m. po podne jaka podzemna tutnjava nalik na grmljavinu i onda na to jak okomit udarac, da su ljudi iz kuća bježali. Pravac potresu bio je od SZ—JI.; a cio pojav trajao je 2 sekunde. (Pavelić.)

Isti dan u 7 s. 17 m. po podne u *Novom* slaba podzemna tutnjava.

Isti dan u 7 s. 35 m. po podne u *Novom* slaba podzemna tutnjava.

Isti dan u 12 s. u noći u *Novom* jača tutnjava sa naglim udarcem.

18. *srpnja* u 0 s. 30 m. prije podne u *Novom* laka podzemna tutnjava. (S. Pammer.)

30. *srpnja* u 7 s. 35 m. prije podne u *Travniku* i *Jajcu* valovit potres, koji je trajao 2 sekunde a išao pravcem od SZ—JI. („Obzor".)

12. *rujna* u 0 s. 45 m. prije podne u *Vrhgorcu* dosta jak potres u pravcu od S—J. Trajao je 7—8 sekunda. Štete nema. (I. Ujević.) — *Makarska*, u 0 s. 41 m. 15 s. prije podne potres, koji je trajao 2 sekunde. — *Živogošće*, izmed 1 i 2 s. prije podne osjetiše ponajprije slabo gibanje od 2 sekunde, na to jači udarac od 1 sekunde, a iza toga još slabo drhtanje kroz 2 sekunde. Pravac je bio od JI—SZ. Zgrade zaškripaše, a predmeti se stadoše micati. Tutnjava čula se je prije i poslje potresa. — *Zgrane* (sjeverozapadno od Živogošća) potres od Z—I. (Mojsisovics p. 41.)

Isti dan u 4 s. 35 m. 40 s. prije podne u *Makarskoj* iznova potres od 3 sekunde. (Mojsisovics, p. 41.)

17. *rujna* u 8 s. 5 m. prije podne u *Prozoru* jak potres, koji je trajao 2—3 sekunde. Udarac je bio okomit. Dva minuta kasnije osjetio se drugi udarac, no slabiji od prvoga. („Hrvatska Domovina".)

Isti dan u 7 s. 32 m. po podne u *Gorici* (občina Biograd kod Zadra) potres od 2 sekunde.

Isti dan u 7 s. 35 m. po podne u *Gorici* drugi potres od 2 sekunde.

Isti dan 7 s. 56 m. po podne u *Gorici* treći, najslabiji potres, od 2 sekunde. Sva tri potresa došla su od S., a pred svakim čula se nagla tutnjava nalik na tutanj topa. (Mojsisovics p. 41.)

20. *rujna* u 1 s. 42 m. prije podne u *Zagrebu* lagan potres valovita gibanja. Uz potres čula se slaba tutnjava, koja je došla od SI. (Meteorološki zavod.) „Hrvatska Domovina" navodi: U 1 s. 30 m. prije podne okomit udarac uz podzemnu tutnjavu, a isto tako u 4. s. prije podne „vodoravna" trešnja. Potres je trajao nekoliko sekunda. Oba udarca slaba.

Kašina, oko 3 s. prije podne pojavio se nakon duge stanke potres. Očutio se srednji udarac uz podzemnu tutnjavu smjerom od SI—JZ. (J. Benković.)

26. *rujna* u 1 s. 37 m. prije podne u *Vrbovskom* valovit potres sa dva udarca. Pravac potresu bio je od SZ—JI.; trajao je 2 sekunde. (Vj. Oršić.)

Severin na Kupi, u 1 s. 33 m. prije podne žestok vertikalan udarac. Trešnja je potrajala 2 sekunde, a pratila ju je jednolika podzemna tutnjava. Štete nema. („Nar. Nov.“)

Vinica, 1 s. 21 m. prije podne potres. U mjestu i u okolici ga dobro ćutiše, jer se je većina od sna probudila. Stanovnici na podnožju uskočkih gora sa kranjske strane nisu potresa osjetili, ali su ga dobro osjetili Hrvati. Bio je valovit udarac srednje jakosti, a došao je od zapada i trajao 3 sekunde. Izvjestitelju pripoviedao je jedan znanac, da je i dan prije toga u 4 sata po podne bio potres. (Prof. Seidl u „Mittheilungen der Erdbebencommission der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, I., von E. Mojsisovics, Sitzungsberichte 1897., I. p. 37.)

---

7. *listopada* u 10 s. 31 m. po podne u *Karlobagu* potres u pravcu od Z—I. Trajao je 2 sekunde. (A. Dundović.)

8. *listopada* u 4 s. prije podne u *Karlobagu* drugi potres u istom pravcu.

Isti dan u 8 s. 20 m. po podne u *Karlobagu* iznova potres od 1 sekunde u istom pravcu. A. D.)

---

10. *studenoga* u 6 s. 10 m. 30 s. prije podne na *Rieci* dvie podzemne tutnjave u razdoblju od 1 sekunde, a uz to jedan osjetljiv udarac. („Agr. Ztg.“)

U *Bakru* u isto doba slab potres. (Met. postaja.)

16. *studenoga* u 0 s. 10 m. 15 s. prije podne na *Rieci* jasno osjetljiva trešnja uz tutnjavu nalik na grmljavinu; trajanje: 1 sekuda. („Agr. Ztg.“)

Taj potres osjetiše još u ovih mjestih:

Volovsko, u 0 s. 10 m. prije podne jak valovit potres, koji je trajao 6 sekunda. Uz potres čula se podzemna tutnjava. („Obzor.“) — U 0 s. 15 m. prije podne u *Volovskom* udarac a prije i poslje njega trešnja od ozdol sa laganim ljuljanjem u pravcu od J—S.; 3 sekunde; tutnjava nalik na grmljavinu čula se prije i poslje potresa. More se uznemirilo i dizalo valove. (Mojsisovics, p. 41.)

Opatija, u 0 s. 10 m. prije podne vrlo jak potres. Trajao je doduše samo 1 sekundu, no ipak se činilo, kao da je bio jači od onoga, što je bio na Uskrs prošle godine. Pravac JZ—SI. („Hrv. Domovina“.)

Bakar, u isto vrieme potres. (Meteor. postaja.)

21. *studenoga* u 11 s. 30 m. po podne potres u *Boci kotorskoj.* Semaforska postaja na *Oštrom* ubilježila je u 11 s. 30 m. po podne jak potres od 4 sekunde. — *Kuti* kod Ercegnovog u 11 s. 40 m. po podne potres od 4—5 sekunda. Potres je došao od J. Svi se predmeti u kućah potresoše. — *Tivat,* u 11 s. 24 m. po podne tri udarca, prvi najjači. Trešnja je trajala 1 sekundu, a pred njom se je kroz 2 sekunde čula podzemna tutnjava. — *Risan,* u 11 s. 30 m. potres od I—Z. Potres je sastojao od kratka udarca od 1 sekunde. (Mojsisovics, p. 42.)

---

2. *prosinca* u 10 sati 43 m. po podne u *Korčuli* valovito gibanje, kao da je netko prodrmao kućom. Ciela trešnja trajala je nešto preko 2 sekunde, a pravac kao da je bio od JI—SZ. Neki kažu, da su uz trešnju čuli i podzemnu tutnjavu. O ponoći ponovila se trešnja, no bila je tako slaba, da ju je malo tko osjetio. (Fr. Radić.)

7. *prosinca* u 2 s. 47 m. prije podne u *Križevcih* dva potresa u razdoblju od 4 minute. Potresi bijahu tako slabi, da su ih osjetili samo oni, koji su bili budni. (Pexider.)

18. *prosinca* u 10 s. 22 m. po podne u *Bakru* potres, a par sekunda iza toga drugi udarac. (Čukli.)

Rieka u 10 s. 14 m. po podne potres sa podzemnom tutnjavom; trajao je 1—2 sekunde. Iza jedne minute ponovio se potres, nu bio je kraći i znatno slabiji, da su ga jedva osjetili. („Bilancia".)

19. *prosinca* 0 s. 30 m. prije podne u *Bakru* neznatan udarac. (Čukli.)

Rieka, 18. prosinca u 11 s. 52 m. po podne čula se podzemna tutnjava. (B.)

19. *prosinca* u 10 s. 38 m. prije podne u *Bakru* opet nešto jači potres. Sva tri potresa u Bakru bila su okomita. (Č.)

31. *prosinca* u 2 s. 52 m. prije podne u *Pakracu* jak valovit potres u dva maha u razdoblju od 1 sekunde. Pravac trešnji kao da je bio od I—Z., a trajao je 3 sekunde. Po kućah se je sve drmalo, a mjestimice padao je i zamaz sa stropova. (Lj. Stein.) — „Obzor" javlja: Pakrac, u 2 s. 50 m. prije podne valovit potres od I—Z., koji je trajao 3—4 sekude. Potres je bio tako jak, da je mnoge ljude od sna probudio. Osim silnih pukotina na stienah nema nikakve druge štete.

Godina 1896. bila je u naših krajevih, što se potresa tiče, vrlo mirna. U svemu imamo te godine ubilježeno 38 potresa, koji su bili u 27 raznih dana. Na pojedine mjesece razdjeljuju se ti potresi evo ovako:

*

U siečnju (7., 27.)	2	potresna	dana	sa	2	potresa
U veljači	—	„	„	„	—	„
U ožujku (17., 25.)	2	„	„	„	2	„
U travnju (6.)	1	„	„	„	2	„
U svibnju (24., 25.)	2	„	„	„	2	„
U lipnju (10.)	1	„	„	„	1	„
U srpnju (15., 16., 17., 18., 30.)	5	„	„	„	9	„
U kolovozu	—	„	„	„	—	„
U rujnu (12., 17., 20., 26.) . .	4	„	„	„	8	„
U listopadu (7., 8.)	2	„	„	„	3	„
U studenom (10., 16., 21.) . .	3	„	„	„	3	„
U prosincu (2., 7., 18., 19., 31.)	5	„	„	„	6	„

Ukupno . . 27 potresnih dana sa 38 potresa.

Potresi ovi ubilježeni su iz ovih mjesta:

Bakar (10. XI.); (16. XI.); (18. XII.); (19. XII.).
Banjaluka (6. IV.) SI—JZ.
Bileće (10. VI.) JZ—SI.
Cetinje (10. VI.).
Dubrovnik (24. V.); (10. VI.).
Gacko (25. III.) JZ—SI.
Grižane (16. VII.) SZ—JI.; (17. VII.) SZ—JI.
Jajce (15. VII.); (30. VII.) SZ—JI.
Karlobag (7. X.) I—Z.; (8. X.) I—Z.
Kašina (20. IX.) SI—JZ.
Korčula (2. XII.) JI—SZ.
Kotor (10. VI.) SZ—JI, S—J.
Križevci (7. XII.).
Kupreš (15. VII,); (16. VII.).
Kuti (21. XI.).
Ljubinje (25. III.); JZ—SI.; (11. VI.) JZ—SI.
Ljubuški (10. VI.) JZ—SI.
Makarska (12. IX.).
Mostar (27. II.) J—S.; (25. III.) JZ—SI.; (10. VI.) JZ—SI.
Novi (17. VII.); (18. VII.).
Opatija (16. XI.) JZ—SI.
Oštro (21. XI.).
Pakrac (25. V.); (31. XII.) I—Z.
Prozor (17. IX.).
Rieka (17. III.); (10. XI); (16. XI.); (17. XII.).

Risan (21. IX.) I—Z.
Sarajevo (10. VI.).
Senj (7. II.).
Severin (26. IX.).
Tivat (10. VI.); (21. XI.).
Travnik (15. VII.); (30. VII.) SZ—JI.
Trebinje (25. III.) JZ—SI.; (10. VI.) JZ—SI.
Vinica (26. IX.) Z—I.
Volovsko (17. III.); (16. XI.).
Vrbovsko (26. IX.) SZ—JI.
Vrhgorac (12. IX.) S—J.
Zagreb (20. IX.) SI—JZ.
Zgrane (12. IX.) Z—I.
Živogošće (12. IX.) JS—SZ.

Malo ne svi potresi od godine 1896. imali su svoje izhodište u poznatih potresnih pukotinah. Ako prodjemo potresne pukotine onim redom, kako sam ih u radnji „Potresi u Hrvatskoj" (Rad 122. god. 1895.) izložio, to ćemo viditi, da su god. 1896. bile ove pukotine u djelatnosti:

Dubrovačka potresna pukotina: 20. svibnja potres u Dubrovniku, 12. rujna u Vrhgorcu, Makarskoj i Živogošću, 17. rujna tri potresa u Gorici kod Biograda, te 21. studenoga u Boci Kotorskoj. Druga dva potresa, što su iste godine zabilježena za Dubrovnik, imala su, kako ćemo kasnije viditi, svoje izhodište u neretvanskoj pukotini.

Viška potresna pukotina izvela je takodjer samo jedan potres i to 2. XII. u Korčuli.

Bakarska potresna pukotina bila je nešto djelatnija. Prvi potres iz te pukotine bio je 7. II. u Senju. Drugi potres 17. III. osjetiše na Rieci i Volovskom. 16., 17. i 18. srpnja imamo iz ovoga kraja 6 potresa. Prvi se je osjetio u Grižanih, drugi u Grižanih i Novom, a ostala četiri u Novom, pa se čini, da se je pri tom potresno ognjište selilo od SZ prama JI. 7. listopada skočilo je potresno ognjište još dalje prema JI, jer taj dan imamo ubilježen potres u Karlobagu, gdje se je on sliedeći dan još dva put ponovio. 10. studenoga vratilo se je potresno ognjište natrag prama SZ.; taj dan bio je potres na Rieci i u Bakru. 16. studenoga potresao se je cio kraj izmed Bakra i Opatije, dakle posve u smjeru bakarske pukotine. 18. prosinca bio je iznovice potres u Bakru i na Rieci, a isto tako i 19. prosinca imamo ubilježen jedan potres za Bakar i Rieku i osim toga još jedan za Bakar.

Potres, što ga osjetiše 26. rujna u Vrbovskom, Severinu i Vinici, imao je bez sumnje svoje izhodište u *pokupskoj potresnoj pukotini*, s čim se posve dobro slaže i pravac (SZ—JS), što je u Vrbovskom opažen.

Krašićka i Sv. Janska pukotina bile su ove godine posve mirne. *Zagrebačka potresna pukotina* stvorila je ove godine samo jedan potres i to onaj 20. rujna, koji osjetiše u Zagrebu i Kašini.

U Slavoniji osjetiše ove godine samo dva potresa i to oba u Pakracu. Prvi je bio 25. svibnja, a drugi 31. prosinca. Kako Pakrac leži upravo u sredini izmed djakovačke i posavske potresne pukotine, pa kako iz neposredne blizine jedne i druge pukotine nemamo viesti, da su potres osjetili, to nije nemoguće, da su ovi potresi u Pakracu imali svoje posebno ognjište u pukotini, koja dosele još nije utvrdjena. Lako je moguće, da izmed Psunja Papuka postoji kakva djelatna pukotina, no za obstanak te pukotine ne nalazimo u dosadanjih opažanjih još dovoljnih i sigurnih dokaza.

U Bosni poznate su nam četiri potresne pukotine i sve četiri pokazale su ove godine nešto malo života. *Banjalučka potresna pukotina* stvorila je 6. travnja dva potresa, koja osjetiše u Banjaluci. *Travnička potresna pukotina* izvela je tri potresa: 15. i 16. srpnja osjetiše potres u Jajcu, Travniku i Kuprešu, a 30. srpnja u Jajcu i Travniku. Iz dohvata *skopljanske potresne pukotine* imamo ubilježen potres u Prozoru, koji je bio 17. rujna. *Neretvanska potresna pukotina* stvorila je tri potresa. Prvi potres osjetiše 27. veljače u Mostaru. Drugi potres 25. ožujka osjetiše u Mostaru, Ljubinju, Trebinju, Gackom i Dubrovniku. Širenje ovoga potresa tako je značajno, da nas ono još bolje utvrdjuje u obstanku neretvanske pukotine, koja poprječno presjeca tok hercegovačkog i dalmatinskog gorja. Isto tako značajan je i treći potres, koji osjetiše 10. lipnja u Sarajevu, Mostaru, Trebinju, Ljubinju, Ljubuškom, Bileću, Dubrovniku, Cetinju i Boci Kotorskoj. Vidimo, da potreseni kraj ima oblik otegnute elipse, kojoj duga os ide po prilici od Sarajeva do Dubrovnika, a to odgovara dosta dobro onom smjeru, u koji smo unieli neretvansku potresnu pukotinu. (Rad 122.)

Petnajsto potresno izvješće: za godinu 1897.

SASTAVIO PRAVI ČLAN DR. M. KIŠPATIĆ.

Predano u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 28. travnja 1898.

5. *siečnja* poslje 10 s. prije podne u *Gornjoj Vogošći*, *Kobiljoj glavi* i obližnjoj okolici žestok potres uz jaku podzemnu tutnjavu. Jednom činovniku bosanske zemaljske vlade, koji se je sutradan desio ondje, pripoviedali su ljudi, da je potres bio tako žestok, da je razno posudje popadalo sa polica na pod. Ljudi se nisu mogli u prvi mah razabrati, pa su stali u velikom strahu bježati iz kuća. Radnici u šumi „Grabljeva njiva" kazivahu, da se je drvlje u svoj šumi savijalo, pa se je moglo opaziti, kako se zemlja diže i kako pada. Potres je mogao potrajati kakovih 10 sekunda, a pravac da mu je bio od JI—SZ. Istoga dana i u isto vrieme osjetio se potres i u *Sarajevu*, ali ga je jedva tko primjetio. Vogošća je udaljena od Sarajeva 2 sata. („Obzor".)

Sarajevo, u 10 s. 23 m. prije podne dva potresa u pravcu od JI—SZ., a trajala su vrlo kratko vrieme. („Hrv. Domevina".)

Visoko, u 10 s. 21 m. potres koji je trajao 3 sekunde i išao od I—Z. („Hrv. Domovina".)

7. *siečnja* u 3 s. 4 m. po podne u *Garčinu* valovit potres. („Nar. Novine".)

14. *siečnja* u 10 s. 53 m. prije podne u *Sutomoru* kod Budve osjetio je izvjestitelj u školi za predavanja jednoličnu trešnju, nalik na udarac odozdo; trajanje 1 sekunda; po gibanju školskih klupa sudeć kao da je bio pravac trešnji od I—Z. Potres osjetiše ljudi samo u kućah, dok ga oni, koji su vani bili, nisu osjetili. Štete nikakve. (Mojsisovics.)

16. *siečnja* u 9 s. po podne u *Šikadu* (u Zagorju) potres. („Hrv. Domovina".)

Mihovljan, u 9 s. po podne potres. (Fr. Cesarec.)

Isti dan u 11 s. po podne u *Šikadu* drugi potres. („Hrvatska Domovina".)

Mihovljan, u 11 s. po podne opet slab potres. (Fr. Cesarec.)

17. *siečnja*, u 1. s prije podne u *Šikadu* mali potres, kako se čini, u pravcu od I—Z. Izvjestitelj javlja, da mu je na krovu i zidovih štaglja napravio potres par stotina forinti kvara, a ipak veli, da mu nitko od ukućana potresa nije osjetio. („Hrv. Dom.")

Mihovljan, u 1 s. prije podne treći potres. (Fr. Cesarec.)

18. *siečnja* u 4 s. 54 m. prije podne u *Zagrebu* trešnja sa dva do tri posve slaba vala uz vrlo slabu tutnjavu. Potres nije trajao ni 1 sekundu. Pravac mu je bio od SI—JZ.

21. *siečnja* u 2 s. 30 m. prije podne u *Senju* dosta osjetljiv potres u pravcu od SZ—JI. (P. Rukavina.)

Vrbnik, u 2 s. 30 m. prije podne potres slabe jakosti; trajao je 1 sekundu. (Alb. Brozović.)

Otočac; „Narodne Novine" javljaju, da je u Otočcu 24. siečnja u 2 s. 35 m. prije podne bio potres, koji je trajao više hipova a išao pravcem od SI—JZ, te da se je uz potres čula podzemna tutnjava, pa da ga većina stanovnika nije oćutila, no nema sumnje, da je to onaj isti potres, koji osjetiše 21. siečnja u Senju i Vrbniku.

Isti dan u 5 s. 40 m. prije podne u *Vrbniku* potres srednje jakosti, koji je trajao 1 sekundu.

Grižane, u 5 s. 26 m. prije podne jedan jak udarac, koji je ljude od sna probudio. Pravac: I—Z; trajanje: 1 sekundu. (Pavelić.)

24. *siečnja* u 9 s. 30 m. po podne u *Bileću* i *Trebinju* valovit potres, koji je trajao 2 sekunde, a išao smjerom od J—S. („Hrv. Dom.")

25. *siečnja* u 1 s. 46 m. 30 s. prije podne u *Zagrebu* lagan potres uz slabu tutnjavu. Potres je trajao $^1/_2$ sekunde, a išao smjerom od SI—JZ. Iza toga prvog udarca zamjetili su u vremenu od četvrt ure još nekoliko valovitih titraja. („Agr. Zeit.)

Potres taj osjetiše još u ovih mjestih:

Jamnica, u 1 s. 44 m. prije podne lagan potres u pravcu od S—J. Potres pratila je podzemna tutnjava, a trajao je 4 sekunde. Štete nema. („Agr. Zeit.")

Lasinja, u $1^3/_4$ s. prije podne lagan potres. („Nar. Nov.")

Isti dan u 11 s. po podne u *Otočcu* potres uz podzemnu tutnjavu. Potres je bio prilično jak, jer je staklenina na ormarih zazveketala. Štete nema. („Nar. Nov.")

27. *sieènja* u 6 s 30 m. po podne u *Djakovu* dosta jak potresni udarac, da se je pričinilo, kao da je u podrumu kakovo veliko bure eksplodiralo. Udarac je bio malo ne okomit, no ipak se je moglo jasno razabrati, da je došao sa jugo-zapadne strane. Udarac je bio samo jedan, a trajao je samo trenutak. (M. Cepelić.)

28. *sieènja* u 3 s. 12 m. prije podne u *Pakracu* lagana horizontalna trešnja, koja je potrajala 2 sekunde. Pravac trešnji bio je od S—J. Od gibanja zaškripaše podovi; štete nema. (L. Stein.)

---

8. *veljače* izmed $^1/_4$ i $^1/_2$11 s. prije podne u *Petrinji* osjetiše mnogi slab potresni udarac sa dosta jakim zvukom, kao da je u podrumu pala bačva na zemlju. Izvjestitelj nije potresa osjetio, premda je u to vrieme mirno u jednom razredu predavao. Kazivahu mu, da je smjer potresa po svoj prilici bio od JI—SZ. U isto doba se je u vinogradu gdje. Miličić spuznuo komad zemlje sa četiri brazde. (Dr. J. Zoch.)

11. *veljače* u 8 s. 18 m. prije podne u *Novom* (Vinodol) dosta jak potres sa jakom podzemnom tutnjavom, nalik na grmljavinu. Potres trajao je 2 sekunde, a tutnjava čula se kroz 4 sekunde prije i poslje trešnje. (S. Pammer.)

Isti dan u 9 s. 29 m. prije podne u *Orebiću* na Pelješcu kratak udarac od malo sekunda u pravcu od J—S.; pratila ga je podzemna grmljavina. Potres osjetiše i u najbližoj okolici. (Mojs.)

Isti dan u 11 s. 33 m. 30 s. prije podne u *Senju* prilično jak potres sa podzemnom tutnjavom. Potres je trajao 4—5 sekunda, a išao pravcem od SZ—JI. Stvari se na ormarih tresle. (P. Rukavina.) — „Narodne Novine“ imadu o tom potresu u Senju ovu viest: U 8 s. 34$^1/_2$ m. prije podne jak potres, koji je trajao 1 minutu, te išao u pravcu od JI—SZ. Lampe su se dosta jako nihale, a stakleno sudje zazveketalo. U isti čas osjetiše potres još i ova mjesta: *Sv. Juraj*, *Sv. Jelena*, *Klenovica*, *Sv. Križ*. U Sv. Jurju bio je potres mnogo jači nego u Senju, što je dokaz, da je došao sa jugo-iztočne strane.

---

18. *ožujka* u 8 s. 40 m. prije podne u *Novom* slaba podzemna tutnjava.

Isti dan, u 8 s. 50 m. prije podne u *Novom* slaba podzemna tutnjava.

Isti dan, u 8 s. 52 m prije podne u *Novom* vrlo jaka podzemna tutnjava, nalik na grmljavinu i uz to lagan potres; trajanje 6 sekunda. (S. Pammer.)

28. *travnja* u 0 s. 2 m. po podne u *Novom* dosta jak potres, koji je trajao 2 sekunde, te bio, kako se čini, okomit. Uz potres čula se vanredno jaka podzemna tutnjava, nalik na jaku grmljavinu. (S. Pammer.)

---

12. *svibnja* u 2 s. 30 m. (prije ili poslje podne?) u *Škaljarih* kod Kotora jednolična trešnja, koja je trajala 2 sekunde. (Mojs.)

19. *svibnja* u 2 s. 40 m. po podne u *Stonu* dva nagla udarca; prvi bio je okomit i trajao 1 sekundu, a na to se odmah osjetilo gibanje u smjeru od J–S. Prije trešnje čula se tutnjava, koja je nalikovala na udaljenu grmljavinu. Pokućtvo se je micalo. — U *Slanom* u 2 s. 40 m. po podne potres. (Mojs.)

20. *svibnja* poslje 10 s. po podne u *Moroviću* potres. („Hrvatska Domovina".)

22. *svibnja* u 8 s. 10 m. po podne u *Ercegnovom* potres, koji je išao pravcem od S—J., kako se to može po gibanju predmeta zaključiti. I u 3 s. po podne bio je potres. (Mojs.)

22. *svibnja* u 11 s. 25 m. po podne u *Kašini* osjetiše poslje dulje vremena opet potres. Prvi udarac bijaše dosta osjetljiv, a iz stanke od kakovih 50 sekunda navalio je drugi, još jači. Smjer bio je od SI—JZ. Uz jedan i drugi potres čula se podzemna tutnjava. (J. Benković.)

23. *svibnja* u 6 s. 4 m. i 6 s. 21 m. po podne u *Biogradu* kod Zadra dvie lagane jednolične trešnje, koje je osjetilo samo malo ljudi. Pravac kao da je bio od S—J., a trajanje prve trešnje 2—3, a druge 1—2 sekunde. Pietlovi zakukuriekaše. (Mojs.)

26. *svibnja* oko 9 s. 10 m. po podne u *Djakovu* potres uz podzemnu tutnjavu. Pravac ne mogoše opredieliti. Potres je trajao 1 sekundu, a tutnjava nešto dulje. (Raček.)

Vuka, u 9 s. 15 m. po podne slab potres, za koji neki vele, da je bio okomit, a drugi, da je išao od S—J. Trajao je 3 sekunde, a dok se je treslo, čula se je i podzemna tutnjava. Prozori su se zatresli. (F. Kühn.)

28. *svibnja* u 11 s. 50 m. po podne u *Slanom* osjetiše potres.

Isti potres ubilježen je još iz ovih mjesta:

Sutomore i okolica, u 11 s. 31 m. po podne jednolična trešnja, koja je trajala 3 sekunde a išla pravcem od I. prama S. (?). Pred trešnjom čula se kroz 1 sekundu podzemna tutnjava.

Makarska, u 11 s. 45 m. po podne jednolično valovito gibanje, koje je trajalo 10 sekunda, a pratila ga je tutnjava, te prasak

pokućtva. Pravac bio je, kako se izvjestitelju čini, od I—Z. Za potresa zalajaše psi.

Škaljari, u 11 s. 45 m. po podne potres, koji je u početku i pri kraju bio slab. Osjetiše ga gotovo svi. Pravac trešnji bio je od Z—I.

Risan, u 11 s. 50 m.; izvjestitelj je spavao u drugom spratu lučkog ureda u sobi, okrenutoj prama jugu, pa ga je u spomenuto vrieme probudio lagan valovit potres, koji je trajao oko 1 sekunde. Potres taj osjetilo je više ljudi. (Mojs.)

29. *svibjna* u 1 s. 15 m. prije podne u *Makarskoj* potres, koji je osjetilo više ljudi. On je trajao 5 sekunda, a išao pravcem od Z—I. Pokućtvo je od trešnje zaškripalo. (Mojs.)

---

27. *lipnja* u 5 s. 10 m. prije podne u *Livnu* dosta jak potres u pravcu od I—Z. Iza potresa čula se jaka podzemna tutnjava. („Obzor".)

30. *lipnja* u 5 s. 12 m. po podne u *Orebiću* na Pelješcu potres, što ga je izvjestitelj osjetio stojeć. Bio je to udarac odozdol, kao da se je nešto pod zemljom srušilo. Gibanje bilo je jednolično, a sudeć po pomicanju pokućtva kao da je pravac bio od J—S. Trešnja je trajala $1^1/_2$ sekunde. Neposredno pred njom čula se podzemna grmljavina.

Korčula, u 5 s. 10 m. po podne potres sa slabom predhodećom tutnjavom. Trešnja je trajala 1 sekundu, bila je valovita, a pravac kao da joj bio od J—S. Očutiše je obćenito. Štete nikakve.

Trpanj na Pelješcu u 5 s. 8 m. po podne okomita trešnja, koju su po cielom mjestu očutili. Trešnja je trajala 4 sekunde, a za njom čula se podzemna tutnjava nalik na grmljavinu. Po gibanju predmeta sudeć bio je pravac trešnji od S—I(?). (Mojs.)

---

15. *srpnja* tik pred 7 s. prije podne u *Samoboru* potres. Izvjestitelj bio je taj čas u školskoj pisarni, te je osjetio, kako se je stao pisaći stol, na kom je pisao, lagano tresti. Trešnja ta postajala je iznenada sve jačom i jačom, ormari i slike stadoše se tresti, staklenke i svietiljke zvečati. Sve je to trajalo kakovih 5 sekunda. Gibanje bilo je valovito, te je imalo smjer od SZ—JI. Uz potres se nije čula nikakva tutnjava. (Mil. Lang.)

16. *srpnja* u 7 s. prije podne u *Senju* valovit potres sa podzemnom tutnjavom. (P. Rukavina.)

17. *srpnja* u 6 s. 15 m. po podne u *Senju* iznovice valovit potres sa podzemnom tutnjavom. Potres je trajao 2 sekunde. (P. Rukavina.)

Vrbnik, u 6 s. 25 m. po podne podzemna tutnjava, koja je trajala 3 sekunde, a na to slaba valovita trešnja, koja je trajala 1 sekundu. Smjer potresu bio je od S—J. (A. Brozović.)

Omišalj, oko 7 s. po podne potres. Izvjestitelj ga nije sam ćutio, al je doznao, da je u to doba samo nekoliko osoba osjetilo lako, kratko ljuljanje, a pred tim da su čuli slabu podzemnu tutnjavu. (Mojs.)

Dobrinj, oko 6 s. 30 m. po podne osjetio je izvjestitelj i još nekoliko osoba lako valovito gibanje od S—J. Trešnja trajala je oko 1 sekunde; kroz jedno 3 sekunde pred trešnjom čula se podzemna tutnjava. (Mojs.)

---

2. *kolovoza* u 7 s. 45 m. po (?) podne u *Dizmu* kod Sinja lagan potres sa podzemnom grmljavinom. Pravac trešnji bio je od Z—I. (Mojs.)

11. *kolovoza* u 10 s. 15 m. po podne u *Oriovcu* potres od tri udarca uz jaku podzemnu tutnjavu. Pravac trešnji bio je od J—S, a trajanje 10 sekunda. (J. Filipić)

Ovaj potres osjetiše još u ovih mjestih:

Nova Gradiška, u 10 s. 16 m. po podne potres sa dosta jakom podzemnom tutnjavom. Potres trajao je 2—3 sekunde, a išao je smjerom od JZ—SI. (F. Schütz.) — „Narodne Novine" imadu za Novu Gradišku označen upravo protivan pravac, naime od SI—JZ.

Brod, u 10 s. 14 m. po podne znatan potres sa jakom podzemnom tutnjavom. Pravac bio je od JZ—SI, a trajao je 5 sekunda. Neki vele, da se je kratko iza toga opetovao znatno slabiji potres sa muklom tutnjavom. (P. Bogdešić.) Zagrebačke novine donose i za ovaj potres upravo protivan pravac, naime SI—JZ.

Požega, u 10 s. 15 m. po podne dosta jak potres, koji je potrajao nekoliko sekunda; uz potres čula se podzemna tutnjava nalik na daleku grmljavinu i to pravcem od Z—I. Neki pripoviedaju, da se je iste noći oko 11 s. ponovio slabiji potres. (A. Posavac.)

Orahovica, u 10 s. 15 m. po podne znatan potres u pravcu od SI—JZ. Najprije se osjetilo kroz 2 sekunde neko zibanje, a onda slaba trešnjava, pri čem se je pokućtvo i posudje treslo. (M. Vrbanić.)

Kutjevo, iza 10 s. po podne potres, koji je trajao 3—4 sekunde. Potres osjetiše i u obližnjih selih, gdje su se na ormarih tresle čaše. (P. Krempler.)

Drenovac, u 10 s. 40 m. po podne velika tutnjava, koja je trajala 3 sekunde. („Obzor".)

Djakovo, oko $^1/_4$11 s. po podne „baš sam se spremao na počinak, kad sam od sjevero-iztočne strane na pol kilometra daljine čuo neku lomljavinu i pomislio: eto potresa. I doista, još nisam mogao ni prozora zatvoriti, a već se je sva moja kuća u pravcu od SI—JZ drmala i tresla. Nije dakle bio udarac iz nutarnjosti zemlje prama površini, nego valovito gibanje u označenom pravcu. Potres su očutili svi, koji su još bili budni. Ure nihalice nisu stale". (M. Cepelić.)

12. *kolovoza* u 1 s. 30 m. prije podne u *Oriovcu* potres sa dva udarca uz slabu tutnjavu. Pravac potresu bio je od I—Z, trajanje 3 sekunde. (J. Filipić.)

Potres taj osjetiše jos u ovih mjestih:

Požega, oko 2 s. prije podne slab potres. (A. Posavac.)

Brod, oko 2 s. prije podne isto taki žestok potres, kao onaj prvi. (P. Bogdešić.)

Djakovo, točno u 2 s. prije podne drugi potres, koji je bio od prvoga jači, jer su zazvečile čaše i tanjuri. Pravac mu izvjestitelj nije mogao ustanoviti, jer ga je potres u snu zatekao. Ovaj potres osjetilo je više osoba, nego onaj prvi. (M. Cepelić.)

24. *kolovoza* u 5 s. 42 m. prije podne u *Osieku* vertikalan potres, koji je sa dosta jakom podzemnom tutnjavom trajao 2 sakunde. Za tutnjavu činilo se izvjestitelju, kao da dolazi od I ili JI. Udarac bio je vrlo slab, te se na visećih predmetih nije primjetilo nikakvo gibanje, a ni seismometar ga nije osjetio. (Gj. Ilić.)

28. *kolovoza* u 4 s. 35 m. u *Baški Vodi* u Makarskoj osjetio je izvjestitelj sjedeć pri pisaćim stolu a i mnogi drugi drmajući udarac, koji je trajao 2 sekunde. Pravac gibanja nije se mogao ustanoviti. (Mojs.)

31. *kolovoza* u 2 s. 45 m. po podne u *Garčinu* potres, koji je išao pravcem od JZ—SI, te trajao 1 sekundu. Za jedan čas ponovio se udarac, a tri časa iza toga došao treći, slab udarac. Štete nema. („Narodne Novine".)

---

1. *rujna* u 5 s. prije podne u *Vrbniku* slaba trešnja, koja je potrajala 1 sekundu. (A. Brozović.)

3. *rujna* u 7 s. 6 m. 26 s. po podne (ura je pokazivala razliku od 8 minuta, al se ne veli, da li + ili —) u *Koljanih* kod Vrlike potres sa prediućom podzemnom tutnjavom. Trešnja je trajala 2—3 sekunde, a imala je pravac od SI - JZ. (Mojs.)

10. *rujna* u 9 s. 30 m. prije podne u *Dizmu* kod Sinja čula se je obćenito jaka tutnjava, a na to osjetiše laku trešnju. Oko 10 s. i 10 s. 30 m. čula se iznovice tutnjava. Trajanje jedno 30 sekunda (?) (Mojs.)

13. *rujna* u 12 s. 24 m. o podne u *Sućurju* na Hvaru osjetiše obćenito pa i u okolici sastojeću od više udaraca jaku trešnju. Pravac gibanju bio je od SZ—JI., a trajanje dobre 2 sekunde. Prije potresa čula se jaka tutnjava i prasak, a poslje potresa čula se u 12 s. 33 m. i u 12 s. 38 m. o podne na grmljavinu nalika tutnjava. Suhozidi oko vinograda su se rušili. (Mojs.)

14. *rujna* oko podne gotovo po svoj *Dalmaciji* dosta jak potres. („Nar List.“)

O tom potresu imamo ubilježene ove viesti:

Viganj na Pelješcu, o podne tako jaka trešnja, da je čeljad pobjegla iz kuća na polje. U kući župnika popadaše na zemlju neke knjige, koje su bile na stolu, a na jednom zidu njegove kuće ukazaše se pukotine. („Nar. List“.)

Korčula, 0 s. 20 m. po podne vrlo jak potres. Stakla na prozorih se zatresla, a posudje na policah zazvečalo. Činilo se, kao da netko tura bačvu po kući. Uz drmanje čula se jaka podzemna tutnjava nalik na grmljavinu. Tutnjava, koja je došla od SI, čula se i pred samom trešnjom. Od potresa uznemirile su se i domaće životinje. (Fr. Radić)

Imotski, u 0 s. 15 m. po podne potres sa jednim dosta jakim udarcem sa strane. Trajao je 5—6 sekunda. Smjer kao da je bio od I—Z. Štete nikakve. (I. Ujević.)

Podgora u Makarskoj, o podne dosta jak potres. Zidovi na pojedinih kućah popucaše, no druge veće štete nema. („Agramer Tagblatt.“)

Makarska, 0 s. 10 m. po podne dva potresna udarca, naglo jedan za drugim. Prvi je bio slabiji i valovit, dok drugi jači kao da je valovit. Očutiše ih obćenito ne samo u kućah nego i poljih. Pravac trešnji kao da je bio od SZ—JI. Prvi udarac čini se da je trajao 5, a drugi 8 sekunda. Uz potres čula se dugotrajna tutnjava, kao da kola prolaze. Pučanstvo se prestrašilo, bojeći se,

da se trešnja ne opetuje. Sa zidova popadaše slike, pa i jedna ura. Štete inače nije bilo. Potres taj osjetili su i u obližnjih selih.

Orebić na Pelješcu, u 0 s. 10 m. i 0 s. 29 m. o podne po srednje-evropskom vremenu dva potresa sa prediućom podzemnom grmljavinom; trajanje 3—4 sekunde; pravac od S prama JZ(?). Ljudi pobjegoše prestrašeni iz kuća. I poslije oćutiše još nekoliko slabih udaraca, al im vrieme nije ubilježeno.

Viganj na Pelješcu, od potresa ukazaše se na zidovih po kućah pukotine, a knjige popadaše sa stola na zemlju.

Jelsa na Hvaru, u 0 s. 12 m. po podne udarac odozdol sa dosta slabim titranjem u pravcu od JI—SZ. Trešnja je trajala 2 sekunde, a 1 sekundu pred njom čula se podzemna tutnjava. Trešnju oćutiše i u obližnjoj kamenitoj okolici. Stolci i stolovi se malo uzdigoše, prozori zazvečaše, a zgrade zaškripaše.

Igrane kod Makarske u 0 s. 30 m. po podne najprije lagan, a onda jači potres od S—J, koji je potrajao 3 sekunde (1 sekundu slabo, 2 sekunde jako), te koji su u cieloj okolici oćutili. Jedno 2 sekunde pred potresom čula se podzemna grmljavina. Zvona se zanihaše. Suhozidi štetovaše. Sviet se je jako prestrašio. Živad je digla veliku kriku, kao da ju je kobac prestrašio. U *Zaostrogu* popucaše u nekih kućah zidovi.

Gradac u Makarskoj, u 0 s. 10 m. po podne obćenito oćutiše jednoličan udarac odozdo u pravcu od JZ—SI. Pred potresom se čula jaka podzemna grmljavina, a sam potres trajao je 4 sekunde. U *Zaostrogu* popucaše u nekih kućah zidovi.

Dizmo kod Sinja, u 11 s. 55 m. prije podne dva kratka, dosta jaka valovita gibanja. Po gibanju kućnih predmeta sudeć, bio je pravac trešnji od JZ prama S(?) Časak pred trešnjom čula se slaba tutnjava.

Supetar na Braču u 0 s. 10 m. po podne po srednjo-evropskom vremenu osjetiše obćenito po cielom mjestu valovitu, jednoličnu trešnju, koja je potrajala 4—5 sekunda. Pred potresom čula se kroz 5 sekunda podzemna tutnjava. Pravac gibanju bio je od Z—I, kako se je to moglo ustanoviti po gibanju uzdrmanog pokućtva. Štete nema. Pučanstvo se je jako prestrašilo.

Spljet, u 0 s. 15 m. po podne osjetiše mnogi kratak, valovit, jednoličan potres od jednog udarca, komu je smjer bio od Z—I. Predmeti se nisu pomicali. Potres nije trajao duže od 3 sekunde. Čula se tutnjava nalik na onu, kad prolaze težka kola. (Mojs.)

17. *rujna* u 1 s. po podne u *Zepču* potres, koji je potrajao 4—5 sekunda. Pravac potresu bio je od S—I (!) („Obzor".)

18. *rujna* u 11 s. 10 m. po podne u *Zadru* jak potres. („Narodni List".)

Ovaj potres osjetiše još u sliedećih mjestih:

Spljet, u 11 s. 20 m. po podne očutilo je samo nekoliko osoba posve lagan udarac. Pravac i trajanje toga posve kratkog potresa ne mogoše ustanoviti.

Trogir, u 11 s. 15 m. po podne okomit potres, koji je trajao 2 sekunde.

Supetar na Braču, u 11 s. 40 m. po podne udarac sa podzemnom tutnjavom.

Jelsa na Hvaru, u 11 s. 30 m. po podne potres.

Grohote na Šolti, oko 11 s. 40 m po podne u razdoblju od 5 minuta dva potresa. Prvi nalikovao je udarcu odozdo, a predmeti pri tom zaškripaše; drugi potres sastojao se od laka ljuljanja prama S, kako se je to moglo po gibanju predmeta ustanoviti. Prvi trajao je 4 a drugi 10—12 sekunda. Podzemna grmljavina čula se kroz 5 sekunda poslje prvog potresa. Čaše i posude na stolovih zadrhtaše, a prozori zazvečaše.

Zlarin, u 11 s. 25 m. po podne dva udarca u razdoblju od 5 sekunda. Pred potresom čula se neobična podzemna tutnjava kroz 4 sekunde. Trešnja osjetila se kao jednolično drhtanje, a po gibanju viseće svietiljke dade se zaključiti, da je potres imao pravac od J—S. (Mojs)

21. *rujna* u 2 s. $4^1/_2$ m. po podne u *Ninu* potres, koji je samo izvjestitelj osjetio. Pravac gibanju bio je po svoj prilici od JZ—SI. Trajanje 1 sekundu. Prije potresa kroz 4—5 sekunda čula se podzemna tutnjava nalik na žestok vjetar u daljini. (Mojs.)

24. *rujna* u 6 s. 40 m. prije podne u *Orebiću* na Pelješcu osjetiše neki slab potres. (Mojs.)

---

12. *listopada* u *Metkoviću* potres. („Agr. Tagb.")

14. *listopada* u 10 s. po podne u *Imotskom* lagan potres, koji je trajao 2—3 sekunde. Pričinilo se, kao da se čuje u daljini kotrljanje kočije. Pravac se nije mogao odrediti. Štete nikakve. (I. Ujević.)

15. *listopada* upravo o podne u *Imotskom* drugi potres, koji je trajao 4—5 trenutaka. Nije bio vrlo jak, ali je bio ipak jači od

prijašnjega. Naličio je tutnjavi daleke kočije. Pravac neizvjestan. Štete nikakve. (I. Ujević.)

18. *listopada* točno u 7 s. prije podne u *Zagrebu* ćutio sam oštro drmanje, koje je potrajalo 3—4 sekunde. Tutnjave nisam čuo. Pripoviedaju mi, da su posve jasno vidili, kako se stolovi nagiblju, pa kako se sve trese. — „Narodne Novine“ navode, da je potres imao smjer od SI—JZ, pa da je trajao 2 sekunde; u nekih predjelih grada, kao n. pr. oko Rudolfove vojarne, osjetio se potres vrlo slabo, dok je drugdje bio prilično jak. „Hrvatska Domovina“ javlja, da se čini, da je smjer potresu bio od S—J.

O ovom potresu imamo još sliedeće viesti:

Kašina, u 7 s. prije podne žestok potres. Prozori zveketahu, a svi predmeti po sobah stadoše se gibati. Smjer se nije mogao razabrati. (J. Benković.)

Stenjevac, u 7 s. prije podne prilično jak potres, koji je potrajao 3 sekunde. Smjer kao da je bio od SZ—JI. (G. Ivančić.)

Samobor, izmed $^3/_4$7 i 7 s. prije podne žestok potres uz silnu podzemnu tutnjavu. Nekoje slabije kućice popucale; druge štete nema. (M. Kleščić.) — Samobor, oko 7 s. prije podne dosta žestok potres uz dosta jaku, muklu, podzemnu tutnjavu. Trešnja trajala je jedno 4 sekunde, a smjer joj je bio od S—J. (M. Lang.)

Kalje, u 6 s. 51 m. prije podne potres, koji je trajao $1^1/_2$ sekunde, a iza njega tutnjava od 1 sekunde. Pravac bio je od Z—I. (Radić.) — „Agr. Zeitung“ ima viest iz Kalja, da je potres imao pravac od I—Z.

Karlovac, u 7 s. prije podne potres osrednje jakosti. Trajao je 2—3 sekunde, a išao pravcem od S—J. Izvjestitelj se je desio pri prozoru u sobi, dok mu je obitelj sjedila pri jelu i točno označila smjer potresu po svietiljci, koja se je u tom pravcu nihala. Jednu ili dvie minute iza ovoga potresa osjetio se je drugi, slabiji potres. („Narodne Novine.“)

Jamnica, u 7 s. 11 m. prije podne dva čvrsta udarca; drugi bio je jači, te se je činilo, da je došao od I. Trajanje 2 sekunde. Sve je dobro treslo. (A. Vranić.)

Topusko, u 7 s. 18 m. prije podne potres. Osjetili su ga svi, koji su bili u postelji, ili koji su sjedili ili mirno stojali. Ljudi, koji su po kući ili vani hodili, nisu ga osjetili. Posudje po ormarih je zazvečalo. Po ljuljanju kreveta sudeći kao da je bio pravac potresu od SI—JZ. Trajao je 3—4 sekunde. (J. Demler.)

Čazma, u 7 s. prije podne potres u pravcu od SI—JZ. Trajao je 3 sekunda. Slike na stienah su se zanihale, a ključanice na vratih zazveketale. (I. Piškorić.)

Sv. Martin pod Okićem, u 7 s. 12 m. prije podne veoma žestok okomit udarac, koji je trajao 3 - 4 sekunde. („Hrv. Domovina".)

Vukmanić, potres od 2—3 sekunde. („Nar. Nov.")

Sisak, u 6 s. 58 m. prije podne potres, koji je trajao 2—3 sekunde, a išao pravcem od J—S. Neki vele, da su isti dan u 4 s. prije podne osjetili potres. („Agr. Zeit.")

Pakrac, u 7 s. 6 m. prije podne valovit potres, koji je trajao 1 sekundu, a išao pravcem od SZ—JI. („Nar. Nov.")

Petrinja, u 6 s. 58 m. 30 s. prije podne dosta jak potres sa tri ili četiri udarca u pravcu od Z—I ili od SZZ—JII. Moj se krevet sa mmom zaljuljao, a isto pripoviedaju i drugi. Sudje na ormaru je zveketalo, lampe se malo zanihale i to samo u gornjem spratu, dok su u dolnjem spratu ostale lampe mirne. Sav potres trajao je $^1/_4$—$^1/_2$ sekunde. Šuma nije bilo. (Dr. I. Zoch.)

Dubica, u 6 s. 55 m. prije podne potres sa dva udarca. Prvi trajao je $^1/_2$, a drugi, koji je iza prvoga jedno 2—3 trenutka kasnije došao, trajao je $1^1/_2$ sekunde. Oba su bila bez tutnjave. Pravac drugomu bio je od SZ—JI. Kuće su se malo drmale. („Obzor".)

19. *listopada* u 7 s. 1 m. 30 s. prije podne u *Karlovcu* potres; jakost 2. stupnja, trajanje do 5 sekunda; smjer SII – JZZ. (Dr. A. Gavazzi.)

30. *listopada* u 10 s. po podne u *Imotskom* lagan potres, koji je potrajao 2—3 sekunde, a nije nanio nikakove štete. Pravac neizvjestan. (I. Ujević.)

---

5. *studenog* u 7 s. 40 m. po podne u *Imotskom* drugi, nešto jači potres. Tresle su se kuće i pokućtvo, ali štete nije bilo. Trajao je 4—5 sekunda. Pravac neizvjestan. (I. Ujević.)

U 7 s. 30 m. po podne potres u *Mostaru*, *Ljubinju*, *Stolcu*, *Ljubuškom*. Potres je bio jak i valovit, trajao je oko 8 sekunda, a išao pravcem od S—J. U *Mostaru* su 10 minuta iza prvoga potresa osjetili drugu, slabu trešnju. („Agr. Zeitung".)

O ovom potresu imamo ubilježene još ove viesti:

Makarska, u 7 s. 37 m. 9 s. po podne potres, koji su općenito ućutili. Bilo je to jednoličnо titranje, koje je trajalo 2 sekunde, a pratila ga duga podzemna tutnjava. Pravac trešnji kao da je bio od SII—JZZ.

Trpanj na Pelješcu, u 7 s. 28 m. po podne jednolična trešnja, koja je potrajala jedno 3 sekunde, te imala pravac od I—Z. Poslje trešnje čula se kroz 5 sek. podzemna tutnjava. Potres se je obćenito ośutio.

Metković, u 7 s. 29 m. po podne po srednjo-evropskom vremenu potres. Izvjestitelj je bio na nasipu uz Neretvu, te je ośutio kao i svi u mjestu jak udarac, a iza njega još dva, tri slabija. Bilo je to valovito jednolično drhtanje, koje kao da je išlo od I—Z, a pratio ga je slab podzemni štropot. Štete nema.

Podgora u Makarskoj, u 7 s. 55 m. po podne dva jednolična udarca u razdobju od 4 sekunde, pravac trešnji bio je od JZ—SI. Prvi udarac trajao je 1, a drugi 2 sekunde. Poslje trešnje čula se jedno $^1/_2$ sekunde podzemna tutnjava. Potres su obćenito ośutili.

Vrhgorac kod Makarske, u 7 s. 45 m. po podne jak potres od 1 minute(?). Od trešnje zaškripalo je pokućtvo, a u narod ušao velik strah Potres se je obćenito osjetio.

Janjina na Pelješcu, u 7 s. 40 m. po podne dva udarca, koja su naglo jedan za drugim sliedila. Potres taj, koji ośutiše i u okolici, imao je pravac od I—Z, a trajao je $^1/_4$ sekunde. Drugi izvjestitelj iz Janjine javlja, da je pri trešnji ośutio samo jedan udarac.

Orebić na Pelješcu, u 7 s. 10 m. po podne po brzojavnoj uri osjetiše potres, koji je išao pravcem od S—J, kako se je to moglo ustanoviti po gibanju pokućtva. Potres taj osjetiše i po cieloj okolici. Trajao je po prilici 5 sekunda. Gibanje je bilo jednolično i bez tutnjave osim one, što je nastala škripanjem pokućtva.

Ston, u 7 s. 53 m. po podne obćenito ośutiše potres. Izvjestitelj bio je u kavani, te je opazio treptanje od jednolična gibanja. Izvjestitelju se čini, a tako misle i drugi, da je potres išao pravcem od S—J. Potres je trajao 4 sekunde. Druge tutnjave nije se moglo čuti, do one, što je trešnja drmanjem predmeta izvela. Štete nije bilo. Pučanstvo je bilo za vrieme i poslje potresa prestrašeno.

Slano, u 9 s. 4 m. po podne (na brzojavnoj uri bilo je 7 s. 17 m.; ure je izvjestitelj tek sutradan usporedio) samo jedan jednoličan udarac, koji je došao od JZ. Potres ośutiše obćenito. Putnici, koji su došli sa parobrodom, pripoviedali su, da se je potres ośutio i u *Dubrovniku*. Trešnja je trajala 5 sekunda. Jedno 30 sekunda pred potresom čula se tutnjava nalik na daleku grmljavinu, koja je potrajala sve do potresa. Štete nema.

Orahovac u Boci Kotorskoj, u 7 s. 43 m. po podne ośutiše ovdje obćenito kao i u okolici potres, koji je trajao 2 sekunde. Jednoličnu ovu trešnju pratila je posve neznatna podzemna tutnjava. Pravac se nije mogao ustanoviti.

*

Tivat kod Kotora u 7 s. 28 m. po podne osjetio je izvjestitelj u drugom spratu školske zgrade jednoličan potres, koji je trajao 1 sekundu. On je sastojao od dva udarca, koja su naglo jedan za drugim sliedili. Pred potresom se čula podzemna tutnjava.

Lumbarda na Korčuli u 7 s. 40 m. po podne osjetio je izvjestitelj u drugom spratu, čitajući, laganu trešnju, koja je trajala 2 sekunde; pred potresom, koji su obćenito i u okolišu ućutili, čula se podzemna tutnjava.

Jelsa na Hvaru u 7 s. 45 m. po podne (ura je išla jednako sa brzojavnom urom) lagan potres odozdo (okomit). Trajao je 2—3 sekunde. Pravac mu se nije mogao ustanoviti. Potres osjetilo je samo malo osoba, ali po cielom mjestu. Tutnjave nije se čulo. Pomični predmeti su lako zadrhtali.

Mljet, u 7 s. 40 m. po podne osjetiše lagan valovit potres, koji je trajao po prilici 5 sekunda, a išao pravcem od SZ—JI. (Mojs.)

6. *studenog* osjetiše po podne u *Dubrovniku* slab potres. („Hrv. Domovina".)

7. *studenog* u jutro ponovio se u *Dubrovniku* nešto jači potres. („Hrvatska Domovina".)

7. *studenog* u 4 s. 50 m. po podne u *Stonu* vrlo kratak potres; osjetilo ga je samo malo osoba. Pravac se nije mogao ustanoviti. (Mojs.)

7. *studenog* u 10 s. 40 m. po podne u *Stonu* potres, koji su obćenito ućutili. Trajao je 2 sekunde. Štete nije bilo nikakve. Pučanstvo se uznemirilo. (Mitt.)

10. *studenog* u 8 s. 10 m. (nije označeno, da li je prije ili poslje podne) u *Orahovcu* kod Kotora kratka, jednolična trešnja, koju je pratila slaba podzemna tutnjava. Trešnja je trajala 2 sekunde, a ućutili su ju obćenito i po okolici. Viseći predmeti se zaljuljaše.

Tivat kod Kotora, u 7 s. 30 m. (prije ili poslje podne?) po uri ratnog jednog broda dvie jednolične trešnje, koje su naglo jedna za drugom sliedile. Pravac gibanju blo je od JI—SZ, a trajanje svakom gibanju $^1/_2$ sekunde. Trešnju ovu osjetilo je samo malo osoba. (Mitt.)

25. *studenog* u 2 s. 30 m. prije podne u *Orebiću* na Pelješcu potres, koji je išao smjerom od I—Z. (Mojs.)

---

2. *prosinca* u 11 s. po podne u *Kninu* vrlo jaka poskočna dvokratna trešnja. Ove godine imali smo više trešnja, ali žestina ove posljednje nadkriljuje sve dosadašnje („Hrvatska Domovina").

O ovom potresu imamo ubilježene još ove viesti:

Korčula, u 10 s. 43 m. po podne nagao i jak jednoličan potres sa valovitim gibanjem u pravcu JI(?). Trešnja je trajala više nego 2 sekunde. Izvjestitelj nije čuo nikakve tutnjave, dok mu drugi kažu da su čuli laganu podzemnu grmljavinu neposredno pred potresom. Trešnja je bila dvostruka, te su ju obćenito ućutili. Ljudi, koji su već spavali, probudili su se od trešnje u osjećanju, kao da je kakav težak predmet na zemlju pao. Svi se predmeti zanihaše. Mnogi se ljudi tako prestrašiše, da iza toga ne mogoše još 3—4 ure usnuti. Neki pripoviedaju, da je o ponoći bio slab potres.

Drugi izvjestitelj iz *Korčule* javlja, da je potres bio u 10 s. 44 m. po podne, pa da je trešnja bila s prva kraja lagana, a onda jača. Pravac gibanju bio je od J—S, sudeć po neposrednom osjećanju. Podzemna tutnjava čula se je prije potresa i trajala je jedno 2 sekunde. Štete nema. Pučanstvo se je držalo mirno.

Lumbarda na Korčuli; izvjestitelj je u drugom spratu stojeć pri svlačenju osjetio u 11 s. 8 m. i u 11 s. 18 m. po podne dva udarca kao dvie jednolične trešnje u pravcu od JZ—SI; pravac je ustanovljen po gibanju predmeta. Prvi, jači udarac trajao je 10, a drugi, slabiji 5 sekunda. Druge tutnjave se nije čulo do one, što ju je gibanje pokućtva uzrokovalo. Pučanstvo bilo je vrlo uzrujano.

Orebić na Pelješcu, u 10 s. 45 m. po podne osjetio je izvjestitelj u drugom spratu u postelji ležeć jak potres, koji je staro i mlado iz sna probudio. Ljudi kažu, da još nisu nikad osjetili jačeg potresa. Deset sekunda iza potresa čula se na JZ grmljavina, pa to je narod još više u strah natjeralo. U koliko se je dalo po gibanju predmeta zaključiti, došao je potres od Z, te je trajao 2—3 sekunde, a bio je cielo to vrieme jednolične jakosti. Za vrieme trešnje čula se tutnjava nalik na udaljen prasak pušaka ili na udaljenu eksploziju baruta. Na nekih kućah ukazaše se pukotine. Tutnjava je ljude tako u strah natjerala, da su mnogi iz kuća pobjegli, pa se nisu više dali natrag. U nekih kućah popadale su slike sa zidova i svjetiljke sa stolova. (Mojs.)

6. *prosinca* u 0 s. 20 m. prije podne u *Plevlju* potres sa podzemnom tutnjavom i na to dva laka udarca. Potres je trajao 2 sekunde. I u *Prijepolju* osjetiše taj potres. („Hrv. Dom.“)

16. *prosinca* u 6 s. 5 m. prije podne po brzojavnoj uri u *Novigradu* kod Zadra jak jednoličan udarac, koji je trajao 4 sekunde,

a išao pravcem od SZ—JI. Potres taj osjetiše obćenito i u okolici izuzevši mjesta, koja su na sjeveru i na jugu. Uz potres kao što i prije i poslje njega čula se jaka podzemna tutnjava kroz 5 sekunda. Zgrade i pokućtvo se zanihalo i zaštropotalo. (Mojs.)

22. *prosinca* u 5 s. 30 m. po podne u *Orebiću* na Pelješcu ćutilo je nekoliko osoba slabu trešnju, koja je potrajala 1—3 sekunde. (Mojs.)

27. *prosinca* u 6 s. 9 m. po podne u *Stonu* osjetio je izvjestitelj pri razgovoru u kavani potres. Bio je to udarac odozdo (okomit), koji je potrajao 4 sekunde. Pravac kao da je bio od I—Z. Pred potresom se čula podzemna tutnja, a od trešnje stale su zgrade i pokućtva škripati. Štete nije bilo. Sviet se je od potresa jako prestrašio. (Mojs.)

31. *prosinca* u 6 s. 25 m. po podne u *Mostaru* jak potres u pravcu od J – S. U narod ušla velika strava. Potres je trajao 5 sekunda sa strahovitom tutnjavom. Iz dućana iztrčao zbunjeni sviet na ulicu. Mnogi su iznieli djecu u naručaju. Sutradan osjetiše u Mostaru dvie trešnje, jednu u 3 s. prije podne a drugu u $3^3/_4$ po podne. („Nar. Nov.“)

O prvom potresu imamo još ubilježenu viest, da je u 6 s. 20 m. po podne bio potres u ***Mostaru***, *Nevesinju i Stolcu*, gdje su osjetili više udaraca, koji su potrajali do 7 sekunda; u *Ljubuškom* u isto doba dva udarca. Pravac bio je svuda od JI—SZ. („Hrv. Domovina“.)

O ovom potresu imamo ubilježene još ove viesti:

Metković, u 6 s. 24 m po podne (po brzojavnoj uri željezničke postaje) ćutiše najprije slab, onda jak udarac. Iza valovita drhtanja, koje je trajalo 5 sekunda, sliedilo je žestoko ljuljanje, koje je trajalo 3—5 sekunda. Pravac gibanju čini se da je bio od SI—JZ, no neki misle, da je pravac bio drugi. Jedno 2 sekunde prije potresa čula se jaka podzemna grmljavina. Trešnju su u mjestu svi osjetili. Predmeti, što su bili na stolovih, stadoše se micati. Na zidovih obješene slike počeše se nihati. Na mnogih mjestih je odpao zamaz sa zidova.

Makarska, u 6 s. 29 m. 40 s. po podne osjetilo je samo nekoliko osoba samo jedan jediti udarac. Gibanje počelo je nekom vršću ljuljanja, na to je nastupilo drhtanje, pa napokon završilo gibanjem. Izvjestitelj boravio je u taj čas u ljekarni, koja se nalazi u sredini grada, gdje se je razgovarao sa tri druge osobe, a nitko potresa nije ćutio, pa je tako izvjestitelj tek kasnije za potres

doznao. Rekoše mu, da je trajao 3 sekunde, a da mu pravac ne mogoše ustanoviti.

Vrhgorac kod Makarske, oko 8 s. po podne potres, koji su obćenito ocutili. Pratio ga je zveket i štropot potresenih predmeta. Narod se od potresa prestrašio.

Pakošćane kod Zadra; potres ovaj, kako se čini, nisu osjetili, ali su za to osjetili isti dan izmed 2 i 3 sata prije podne potres i to obćenito. Bio je to jednoličan potres, koji je trajao 2—3 sekunde; pratila ga je podzemna tutnjava nalik na grmljavinu. Potres taj ocutiše i u okolici.

Slano kod Dubrovnika, u 7 s. 15 m. po podne potres. Najprije se je čula buka kao od dolazećeg vjetra, a onda prasak, kao da se papir od stiene trga, a na koncu buka, kao da ljudi u gornjem spratu skaču. Čaše i boce u staklenih ormarih udaraše o zidove. Pravac gibanju bio je od JZ—SI. Tutnjava prije udarca trajala je 10 sekunda, a i sam potres trajao je 10 sekunda. Na jednoj kući pukao je pročelni zid na dva mjesta i razpucao je pod.

Janjina na Pelješcu, oko 6 i oko 8 s. po podne osjetiše potres sa valovitim titranjem. Ocutilo ga je samo malo osoba. Tutnjave nisu čuli.

Orebić na Pelješcu, u 6 s. po podne potres, koji su obćenito ocutili. Potres trajao je 1—3 sekunde, a išao je pravcem od J—S.

Orahovac kod Kotora, oko 7 s. 30 m. po podne posve kratak jednoličan potres, koji je trajao oko 1 sekunde. Trešnju je pratila slaba podzemna grmljavina. (Mojs.)

Godine 1897. imamo u svem ubilježeno 67 raznih potresa, koji se razdieljuju na 58 raznih dana, pa ako i jest ovaj broj nešto veći od prošlogodišnjeg, to je on ipak prama prijašnjim godinam dosta malen. Na pojedine mjesece razdieljuju se ovi potresi ovako:

U siečnju (5., 7., 14., 16., 17., 18., 21., 24., 25., 27., 28.) .	11	potresnih	dana	sa	14	potresa
U veljači (8., 11.)	2	„	„	„	4	„
U ožujku (18)	1	„	„	„	3	„
U travnju (28.)	1	„	„	„	1	„
U svibnju (12., 19., 20., 22., 23., 26., 28., 29.)	8	„	„	„	9	„
U lipnju (27., 30.)	2	„	„	„	2	„
U srpnju (15., 16., 17.) . . .	3	„	„	„	3	„

U kolovozu (2., 11., 12., 24., 28., 31.)	6	potresnih	dana	sa	6	potresa
U rujnu (1., 3., 10., 13., 14., 17., 18.)	7	„	„	„	7	„
U listopadu (12., 14., 15., 18., 19., 30.)	6	„	„	„	6	„
U studenom (5, 6., 7., 10., 25).	5	„	„	„	6	„
U prosincu (2., 6., 16., 22. 27., 31.)	6	„	„	„	6	„
Ukupno . .	58	potresnih	dana	sa	67	potresa.

Potresi ovi ubilježeni su za ova mjesta:

Baška voda (28. VIII.).
Bileće (24. I.) J—S.
Biograd (23. V.) S—J.
Brod (11. VIII) JZ—SI ili SI—JZ; (12. VIII.).
Čazma (18. X.) SI—JZ.
Dizmo (VIII. 2.) Z—I.; (10. IX.); 14. IX.).
Djakovo (27. I.) JZ—SI; (26. V.); (11. VIII.) SI—JZ; (12. VIII.).
Dobrinj (17. VII.) S—J.
Drenovac (11. VIII.).
Dubica (18. X.) SZ—JI.
Dubrovnik (6. XI.); (7. XI.).
Ercegnovi (22. V.) S—J.
Garčin (7. I.); (31. VIII.) JZ—SI.
Gradac (14. IX.) JZ—SI.
Gradiška Nova (11. VIII.) JZ—SI ili SI JZ.
Grižane (21. I.) I—Z.
Grohote (18. IX.).
Igrane (14. IX.).
Imotski (1. IX.) I—Z.; (14. X.), (15. X.); (5. XI.).
Jamnica (25. I.); (18. X.) I—Z.
Janjina (5. XI.) I—Z.; (31. XII.).
Jelena Sv. (11. II.).
Jelsa (14. IX.) JI—SZ.: (18. IX.); (5 XI.).
Juraj Sv. (11. II.).
Kalje (18. X.) Z—I.
Karlovac (18. X.) S—J; (19. X.) SII—JZZ.
Kašina (22. V.) SI—JZ; (18. X.).
Klenovica (11. II.).

Knin (2. XII.).
Kobilja Glava (5. I.) JI—SZ.
Koljane (2. IX.) SI—JZ.
Korčula (30. VI.) J—S.; (14. IX.) SI—JZ.; (2. XII.) J—S.
Križ Sv. (11. II.).
Kutjevo (11. VIII.).
Lasinja (25. I.).
Livno (27. VI.) I—Z.
Ljubinje (5. XI.) S—J.
Ljubuški (5. XI.) S—J; (31. XII.) JI—SZ.
Lumbarda (5. XI.); (2 XII.) JZ—SI.
Makarska (29. V.) I—Z. i Z—I.; (14. IX.) SZ—JI.; (5. XI.) SI—JZZ.; (31. XII.).
Martin Sv. (18 X.).
Metković (12. X.).; (5. XI.) I—Z.; (31. XII.) SI—JZ.
Mihovljan (16. I.); (17. I.).
Mljet (5. XI.) SZ—JI.
Morović (20. V.).
Mostar (5. XI.) S—J; (31. XII) J—S ili JI—SZ.
Nevesinje (31. XII.) JI—SZ.
Nin (21. IX.) JZ—SI.
Novi Vinodol (11. II.); (18. III.); (28. IV.).
Novigrad (16. XII.).
Omišalj (17. VII.).
Orahovac (5. XI.); (10. XI.); (31. XII.).
Orahovica (11. VIII.) SI—JZ.
Orebić (11. II.) J—S.; (30. VI) J—S.; (14. IX.); (24. IX.), (5. XI.) S—J.; (25. XI.) I—Z.; (2. XII.); (22. XII.); (31. XII.) J—S.
Oriovac (11. VIII.) J—S.; (12. VIII.) I—Z.
Osiek (24. VIII.) I—Z., JI—SZ.
Otočac (21. I.) SI—JZ.; (25. I.).
Pakošćane (31. XII.).
Pakrac (28. I.) S—J.; (18. X.) SZ—JI.
Petrinja (8. II.) JI—SZ.; (18. X.) Z—I ili SZZ—JII.
Podgora (14. IX.).; (5. XI.) JZ—SI.
Plevlje (6. XII.).
Požega (11. VIII.) Z—I.; (12. VIII.).
Prijepolje (6. XII.).
Risan (29. V.).

Samobor (15. VII.) SZ - JI.; (18. X.) S—J.
Sarajevo (5. I.) JI—SZ.
Senj (21. I.) SZ—JI.; (11. II.) SZ JI.; (16. VII.); (17. VII.).
Sisak (18. X) J - S.
Slano (19. V.); (28. V.); (5. XI.) JZ—SI.; (31. XII.) JZ—SI.
Spljet (14. IX.) Z—I.; (18. IX.).
Stenjevac (18. X.) SZ—JI.
Stolac (5. XI.) S—J.
Ston (19. V.) J—S; (5. XI.) S—J.; (17. XI.), (27—XII.) I—Z.
Sućurje (13. IX.) SZ—JI.
Supetar (14. IX.) Z—I.; (18. IX.).
Sutomore (14. I.) I—Z.; (28. V.).
Šikad (16. I.); (17. I.).
Škaljari (12. V.); (29. V.) Z—I.
Tivat (5. IX.); (10. XI.) JI—SZ.
Topusko (18. X.) SI—JZ.
Trebinje (24. I.) J—S.
Trogir (18. IX.).
Trpanj (30. VI.); (5. XI.) I—Z.
Viganj (14. IX.).
Visoko (5. I.) J—Z.
Vogošća Gornja (5. I.) JI—SZ.
Vrbnik (21. I.); (17. VII) S—J ; (1. IX.).
Vrhgorac (5. XI.); (31. XII.).
Vuka (26. V.) S—J.
Vukmanić (18. X.).
Zadar (18. IX.).
Zagreb (18. I.) SI—JZ.; (25. I.) SI—JZ.; (18. X.) SI—JZ.
Zlarin (18. IX.) J—S.
Žepče (17. IX.) S—J.

Ako razvrstamo sav materijal, što ga imamo za godinu 1897. sakupljen, da ustanovimo izhodište za pojedine potrese, to ćemo se uvjeriti, da su nam viesti za ovu godinu vrlo nepodpune, da je bilo potresa, za koje ne možemo ustanoviti prostor, koji su zahvatili, a prema tomu često ni izhodište. Nema sumnje, da je zadnjih godina zanimanje za potresne pojave postalo jače, da nam dnevni listovi mnogo češće donose viesti o potresih, pa da imamo i po cieloj zemlji revnih izvjestitelja, no to sve još nije dosta. Mi ćemo tek onda biti zadovoljni, kad se bude u svakom mjestu našao čovjek, koji će svaki i najneznatniji potres ubilježiti i dojaviti, jer

će samo onda svaka viest imati veliku vriednost za znanstveno proučavanje potresnih pojava.

U koliko naše viesti dopuštaju, to možemo ustanoviti, da su tiekom godine bile ove potresne pukotine u djelatnosti:

Dubrovačka potresna pukotina bila je bez sumnje izhodištem potresu, koji osjetiše 14. siečnja u Sutomoru i 12. svibnja u Skaljarih. Ona je stvorila potrese 19. svibnja u Stonu i Slanom, 22. svibnja u Ercegnovom, te 23. svibnja u Biogradu. Potres od 28. svibnja, koji osjetiše u Slanom, Makarskoj, Risnu, Škaljarih i Sutomoru, upućuje nas po svom širenju na dubrovačku potresnu pukotinu. Iz nje su potekli bez sumnje i potresi 29. svibnja u Makarskoj. 2. kolovoza u Dizmu, 28. kolovoza u Baški vodi, 3. rujna u Koljanih, 10. rujna u Dizmu, 21. rujna u Ninu, 7. studenog i 27. prosinca u Stonu, 10. studenog u Orahovcu i Tivtu, te 16. prosinca u Novigradu. Tu je bilo izhodište potresu, koji osjetiše 18. rujna u Zadru, Spljetu, Trogiru, Supetru, Jelsi, Grohotah i Zlarinu. Za potres, koji je bio 14. rujna, pa za koji javlja „Narodni List“, da ga osjetiše gotovo po svoj Dalmaciji, ne možemo pravo reći, da li je imao svoje izhodište u dubrovačkoj ili u viškoj potresnoj pukotini. U samom Zadru, čini se, da potres nisu osjetili, jer bi to zadarske novine ubilježile. Potres taj zabilježiše samo iz Vignja, Korčule, Imotskoga, Podgore, Orebića, Makarske, Igrana, Gradca, Jelse, Dizma, Supetra i Spljeta, pa bi isto tako moglo biti, da je izhodište potresu bilo u viškoj pukotini, ali kako su nam viesti o širenju potresa nepodpune, to moramo priznati, da nemamo nikakvih sigurnih podataka, po kojih bismo mogli zaključiti, da li je potres potekao iz viške ili dubrovačke pukotine. — 14. 15. i 30. listopada imamo ubilježena tri potresa iz Imotskoga, no nijednomu nije se mogao ustanoviti pravac. Imotski je u neposrednoj blizini dubrovačke potresne pukotine, pa ako su sva tri potresa bila malena širenja, kao što je vjerojatno, onda im moramo izhodište tražiti u dubrovačkoj pukotini. Peti potres, koji se je ove godine osjetio u Imotskom, imao je svoje izhodište, kako ćemo kasnije čuti, u neretvanskoj potresnoj pukotini. — Valoviti potres 24. siečnja u Bileću i Trebinju upućivao bi nas svojim pravcem (J—S) na dubrovačku potresnu pukotinu, pa je šteta, što iz Dubrovnika i obližnje okolice nemamo nikakovih viesti, da li se je potres osjetio.

2. prosinca bio je potres i to dosta žestok u Kninu. U isto doba opazili su vrlo jak potres u mjestih, koja leže oko *viške potresne*

pukotine, i to u Korčuli, Lumbardi i Orebiću. Na velikom onom prostoru, koji se nalazi izmed Knina i viške potresne pukotine, nije nigdje ubilježen potres, pa ako i zbilja nije tu potresa bilo, onda moramo predpostaviti, da su gotovo u isti mah djelovale dvie potresne pukotine, viška i dubrovačka. — Iz viške potresne pukotine potekao je potres od 11. veljače u Orebiću, te 30. lipnja u Orebiću, Korčuli i Trpnju. Iz Orebića imamo još ubilježene potrese 24. rujna, 25. studenog i 22. prosinca, i nema sumnje, da su svi ti potresi potekli iz viške potresne pukotine.

Bakarska potresna pukotina bila je ove godine dosta živahna. Prvi potres 21. siečnja osjetiše u Vrbniku, Senju i Otočcu. Širenje ovo posve jasno govori, da je izhodište ovomu potresu bilo u dolnjoj polovici bakarske pukotine. Isti dan ponovio se je potres, pa kako ga od spomenutih mjesta javljaju samo iz Vrbnika, a uz to još iz Grižana, gdje prvi potres po svoj prilici nisu primjetili, jer bi ga inače revni izvjestitelj dojavio, to moramo odatle zaključiti, da je pri ovom drugom potresu potresno ognjište u bakarskoj pukotini skočilo nešto više prema sjevero-zapadu. Treći potres, što ga osjetiše 25. siečnja u Otočcu, pokazuje nam, da je potresu ognjište iznovice skočilo natrag na jugo-iztok i to valjda još dalje od onoga mjesta, gdje je ono bilo pri prvom potresu. Ovu selitbu potresnog ognjišta u bakarskoj potresnoj pukotini susrećemo pri potresih od 11. veljače. Prvi potres toga dana (8 s. 18 m. prije podne) osjetiše u Novom, a nekoliko sati iza toga (11 s. 33 m. 30 s. prije podne) potresla se je neposredna okolica Senja (Senj, Sv. Juraj, Sv. Jelena, Klenovica i Sv. Križ). 18. ožujka skočilo je potresno ognjište iznovice natrag prama Novom, jer taj dan osjetiše u Novom dvie slabe tutnjave i jedan lagan potres. 28. travnja ubilježen je iznovice potres u Novom. 16. srpnja ubilježen je potres u Senju, a 17. srpnja u Senju, Omišlju, Dobrinju i Vrbniku. Oba ta potresa kao i onaj 1. rujna, što ga osjetiše u Vrbniku, imala su bez sumnje svoje izhodište u bakarkoj potresnoj pukotini.

15. srpnja osjetiše prilično jak potres u Samoboru. Kako iz izvještaja bečke potresne komisije razabiremo, bio je u isto doba po susjednih slovenskih zemljah dosta jak potres, koji se ima smatrati kao nastavak onoga velikog potresa, koji je Ljubljanu oštetio, te je prema tomu bilo izhodište samoborskom potresu izvan Hrvatske.

Zagrebačka potresna pukotina stvorila je ove godine osam potresa. 16. siečnja osjetiše u Šikadu i Mihovljanu dva, a 17. siečnja jedan potres. Oba ova mjesta nalaze se u neposrednoj blizini Sutinskih

toplica. Pri proučavanju velikog zagrebačkog potresa god. 1880. (Potresi u Hrvatskoj, knj. 122. p. 76.) pokazalo se je, da zagrebačka potresna pukotina mora se sudarati sa onom pukotinom, iz koje potječe topli izvor Sutinskih toplica, pa smo prama tomu i prama širenju mnogih starijih potresa zagrebačke okolice zaključili, da tu postoji vrlo djelatna potresna pukotina, koja ide od Lepoglave preko Sutinskih toplica prama Petrinji. Spomenuta tri potresa govore iznovice posve jasno, da se kod Sutinskih toplica nalazi djelatna potresna pukotina, a starija opaženja pokazaše, da ovamo zalazi zagrebačka pukotina, pa tako nema sumnje, da su spomenuti potresi potekli iz zagrebačke potresne pukotine. Poslje trećega potresa u Šikadu i Mihovljanu osjetio se je sliedeći dan (18. siečnja) slab valovit potres u Zagrebu i to u pravcu od SI—JZ., dakle u pravcu, u kom se malo ne svi potresi u Zagrebu osjećaju. Potresno ognjište, koje je bilo 16. i 17. siečnja u blizini Sutinskih toplica, skočilo je prema tomu 18. siečnja nešto niže prama jugu. — Potres, koji se je osjetio 25. siečnja u Zagrebu u pravcu od SI—JZ., dopro je do Jamnice i Lasinje, a to širenje iznovice govori za to, da se zagrebačka potresna pukotina proteže od S—J. Potres od 8. veljače u Petrinji mogao je imati svoje izhodište u južnom dielu zagrebačke pukotine, a potres od 22. svibnja u Kašini je bez sumnje iz iste pukotine potekao. — Najznačajniji potres bio je 18. listopada. Osjetiše ga u Zagrebu (SI—JZ.), Kašini, Stenjevcu (valjda od SZ—JI.), Samoboru (S—J.), Kalju (Z—I.), Karlovcu (S—J.), Jamnici (I—Z.), Topuskom (SI—JZ.), Čazmi (SI—JZ.), Sv. Martinu, Vukmaniću, Sisku (J—S.), Pakracu (SZ—JI.), Petrinji (SZZ—JII.) i Dubici (SZ—JI.). Ovakovo širenje opaženo je kod svih nešto jačih zagrebačkih potresa, te nam se prikazuje u otegnutoj elipsi, kojoj dulja os ide od Kašine prama Petrinji, pak nam ovaj potres iznovice dokazuje, da smo dobro označili pravac zagrebačke potresne pukotine, kad smo ga potegnuli iz Lepoglave prama Petrinji.

U Djakovačkoj potresnoj pukotini bilo je po svoj prilici izhodište potresa, što ga osjetiše 7. siečnja u Garčinu. Potres od 27. siečnja u Djakovu imao je bez sumnje izhodište u istoj pukotini, a tako onaj od 26. svibnja, što ga opaziše u Djakovu i na Vuki. Za potres od 20. svibnja u Moroviću težko je reći, da li je došao iz djakovačke ili posavske pukotine, jer ne znamo, kako se je širio. Potres od 31. kolovoza u Garčinu imao je valjda kao i onaj od 7. siečnja svoje izhodište u djakovačkoj pukotini, dok za onaj

od 24. kolovoza u Osieku ne znamo, da li je imao svoje sielo u Slavoniji ili u Ugarskoj.

Na *posavsku potresnu pukotinu* moramo svesti dva potresa, što ih osjetiše 11. i 12. kolovoza. Prvi zabilježiše iz Oriovca (J—S.), Nove Gradiške (JZ—SI.), Broda (JZ—SI., SI—JZ.), Požege (Z—I.), Orahovice (SI—JZ.), Kutjeva, Drenovca i Djakova (SI—JZ.), a drugi iz Oriovca (I—Z.), Požege, Broda i Djakova. Potres, što ga osjetiše 28. siečnja u Pakracu (S—J.) upućuje nas svojim pravcem na zapadni okrajak djakovačke potresne pukotine, no moguće je, kako smo to u zadnjem izvješću spomenuli, da izmed djakovačke i posavske pukotine postoji posebna pukotina, koja je ovaj potres stvorila.

17. rujna ubilježen je potres u Žepču, pa kako u blizini toga mjesta prolazi *banjalučka potresna pukotina*, to je vjerojatno, da je on imao u njoj svoje izhodište.

Travnička potresna pukotina vuče se od Travnika pokraj Visokog prama Sarajevu, pa je posve vjerojatno, da je u njoj imao svoje izhodište potres, što ga osjetiše 5. siečnja u Visokom, Vogošći Gornjoj i Sarajevu. Plevlje i Prijepolje, gdje je ubilježen potres 6. prosinca, nalazi se upravo u nastavku travničke pukotine. Taj nastavak smo mi u našoj karti (Potresi u Hrvatskoj, knj. 122.) označili predhodno točkami, pa ako smo tim pogodili istinu, onda nema sumnje, da je dotični potres potekao iz travničke pukotine.

Kako za potres od 27. lipnja imamo ubilježenu jedinu viest iz Livna, to ne možemo reći, da li je ona potekla iz skopljanske ili dubrovačke pukotine.

Iz *neretvanske potresne pukotine* potekao je bez sumnje potres, koji osjetiše 5. studenog u Imotskom, Trpnju, Metkoviću, Makarskoj, Janjini, Orebiću, Stonu, Slanom, Orahovcu, Tivtu, Lumbardi, Jelsi, Mljetu, Mostaru, Ljubinju, Ljubuškom i Stolcu, pri čem se je u Mostaru 10 minuta iza prvog udarca potres ponovio. 31. prosinca imamo iznovice potres u Mostaru, Nevesinju, Stolcu, Ljubuškom, Metkoviću, Makarskoj, Vrhgorcu, Pakošćanih, Slanom, Janjini, Orebiću i Orahovcu, pa da je pri tom u djelatnost stupila neretvanska pukotina, vidi se još i po tom, što su sliedeći dan (1. siečnja 1898.) u Mostaru osjetili još dva potresa. Vrlo je vjerojatno, da je i potres od 12. listopada u Metkoviću imao svoje sielo u neretvanskoj pukotini, ali se to neda sigurno tvrditi, pošto pokraj Metkovića prolazi i dubrovačka pukotina, a o samom širenju potresa nemamo nikakve viesti.

Bôdorka.

Čitano u sjednici razreda matematično-prirodoslovnoga jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 27. lipnja 1898.

Napisao prof. M. Medić.

Na zamolbu gosp. S. *Brusine,* kr. sveučilišnog profesora, blagoizvoljela je kr. zemaljska vlada otpisom od 21. lipnja 1892. br. 54.987 rasposlati na područne oblasti njegove „kvestionare“, da bi se sakupilo što više i što bolje ihtiološke građe, koja bi se mogla upotrebiti i pri pravljenju zakona o ribolovu.

Nekoliko dana prije onog razlaganja o „bodorci“ u „Narodnim Novinama“ (br. 80. i 85. od god. 1898.) izjavio sam želju ovom zaslužnom zoologu i neumornom muzejskom ravnatelju zoologičkoga odsjeka: da bih se radovao, kad bih mogao proučiti i to tako prikupljeno gradivo. Ali je dobrota ovoga odličnog stručnjaka nadmašila moju želju, sabranu građu dobio sam na izrađivanje, pa na tom povjerenju zahvaljujem gosp. prof. S. Brusini i na ovom mjestu.

Pošto je za me u ovaj mah vrlo važno pitanje o „bodorci“, potražio sam, da li nema štogod i o njoj u tom gradivu. Obratio sam se doduše i sam na čitaoce „Nar. Novina“, koji žive uz Dunav, da bi me izvoljeli potpomoći u nastojanju, da se pronađe istina, ali mi u svemu samo dva odgovora stigoše; no zato je ovo gradivo izdašnije, a i prostire se na svu Hrvatsku i Slavoniju.

Kad sam u „Nastavnom Vjesniku“ (knjiga V, str. 161) čitao, da gosp. Drag. Hircu „nije poznata *podorka*, koja živi u Dunavu kod Dalja i u močvari Palači kod Čepina“, slegao sam samo s ramenima, jer je već i u *„Radu“* (knjiga 126., str. 101) mnogo prije štampano ime „bodorka“ sa značenjem *Leuciscus rutilus*, Linné. Ali kad iza toga nađoh: „I Pančić nam je zabilježio slično ime *bodorka* za ribu, *koja živi kod Gabele u Hercegovini*“, bio sam veoma iznenađen, jer sam se sjećao, da sam u toj njegovoj raspravi od godine 1860. najprije i našao narodno ime „bodorka“, a onda da sam po savjetu njegovu i raspitivao zemunske ribare, da li možda oni ne zovu koju ribu tako. Dr. J. Pančić veli na tom

mjestu: „. . . ima još mnogo imena riba, koje nijesam mogao dobaviti, da ih naučno ispitam. Evo tih imena: bajin, *bodorka*, buborak, verozub, vrisak, *gabeoka u Gabeli u Hercegovini*, glavatica u Neretvi u Dalmaciji, dabrak šarena kao pastrmka no zuba kao u smuđa, zelentrba, zlotrba, zumbor, jatnik, keljavac, kokeljan, kurjak u Smederevu, lapara, mersim, oštrnica u Drini, patuca, pijor u Lici, ploščica, piskavac, piskor, poležak, popadići, sinjac, točkov, udovica, ciškov oko donjeg đerdapa, čikovac.“[1]

Ova Pančiću nepoznata imena poređana su ćirilovskom azbukom. Kad sam ih ja ono čitao, znao sam, da n. pr. „gabeoke“ izrijekom ima „u Gabeli u Hercegovini“, glavatice u Neretvi u Dalmaciji, pijora u Lici itd.; a vjerovao sam, da se i ona druga imena čuju u narodu, ali da Pančić nije za pravo znao, gdje da se govore. Premda sam uvjeren, da po rečeničnoj konstrukciji (osim gosp. Drag. Hirca) ne će moći nitko drugi tvrdjeti, da je Pančić onih 5 imena, što su pred imenom „gabeoka“, svezao također za Gabelu u Hercegovini, ne će biti s gorega, da iznesem još dokaza, da je gosp. Drag. Hirc krivo shvatio Pančića, a otuda da je potekao sav ovaj posao, bez kojega smo lako mogli biti. U jednoj bilješci dodaje Pančić, da mu javlja proto M. Stojadinović iz Zaječara, da „*verozub* nije nalik na smuđa, već na klena, samo što ima manja usta; da ženka može težiti 4 oke, da ga je nekada bilo dosta u Timoku, no da, od kada vapori na *Dunavu* plove, u *Timok* više ne dolazi, ali da ga ima dosta u rijeci Olti u susjednoj Vlaškoj“. Zar je Dunav s pritokom Timokom „u Gabeli u Hercegovini“? Po tom shvaćanju bilo bi onda „*patuce*“ u Lici; a svaka od onih riba imala bi i svoju postojbinu, samo ona posljednja, „čikovac“, ostala bi bez nje!

Riba „bajin“ zabilježena je u kvestionar gradskog poglavarstva osječkog, i to po kazivanju ribara Ivana Kunsta; a kad sam služio u Osijeku, čuo sam i za nju od „djeda“ Martina Žetića, pa sam je i odredio kao *Aspius rapax*, Agassiz („Rad“, knj. 126., str. 108). Ele jedno s drugim hrabri nas, da od sada ne će biti dvoumice o smislu onog predašnjeg ulomka iz Pančićeve rasprave, t. j, da bi trebalo u „Nast. Vjesniku“ popraviti onu rečenicu, što me je onako iznenadila: da „podorci“ slično riblje ime „bodorka“ nije zabilježio Pančić, *već gosp. Hirc*, za ribu, „koja živi kod Gabele u Hercegovini!“

[1] „Риóе у Срóнји“ (separ. otisak), Biograd 1860., str. 8 (s ispravkom ozada).

I tako sam evo stekao u Pančiću najstarijeg i najpouzdanijeg svjedoka, da se jedna riba izvan Gabele zove „bodorka". — a nikako „podorka". Ali gdje, i koja?

Poznato je onome, tko prati ovu stvar, da sam godine 1889. za Zemun odredio *bodorku* kao *Leuciscus rutilus,* Linné (dru. J. *Leunisu* glavna su njemačka imena za ovu vrstu „Ploetze" i „*Rothauge"),* a *crvenperka* da je tamo *Scardinius erythrophthalmus,* Bonaparte (Leunis odabra za nju imena „*Rothfeder*" i „*Unechtes* Rothauge").[1] *Brehm* u „Thierleben"-u kazuje, kako su obje ove vrste dobile mnogo jednakih imena i na njemačkom jeziku, a kao što znamo stoga, što ih isprva držahu za *jednu* jedinu. Na primjercima iz *riječnog korita crvene se neke peraje u obiju vrsta*; u *bodorke* je obično *dužica* (šarenica, iris) u oku *crvena,* a u crvenperke „je ona *sjajna kao zlato,* a *ozgo* ponajviše s *jednom crvenom pjegom*", — pa toga radi razlaže i Ottó *Herman,* da to *očno* i *perajno crvenilo* baš i navodi ljude, da ih trpaju zajedno („A magyar *halászat könyve",* Budimpešta 1887., str. 718). I ovaj pisac naglašuje, da je ustroj „drobećih zuba" svagda glavno obilježje za raspoznavanje bodorke od crvenperke. Valja znati, da je zuba u ove potonje vrste sa svake strane ždrijela na „gušnoj kosti" po 8: *u jednom redu 5, a u drugom 3,* dokle ih je u one prve (bodorke) s lijeve strane po 6 (a i 5), a s desne svagda po 5, te svi da su samo u *jedan* redak smješteni. I glave ili krunice zubne razlikuju se oblikom svojim, u crvenperke su one „stisnute i duboko *rovašene",* ali ne na svima, pa zato i nazva Pančić te zube u nje „grabećim zubima". No tijelo u bodorke nalik je više na tkalački *čunak;* a *na trbuhu nema između trbušnih peraja i zadnje ni onog oštrog brida,* kao što je u crvenperke.

„Obično su — napominje Brehm — leđa u *crvenperke* smeđozelena, bokovi sjajno žuti kao žuta mjed (trumč), trbuh srebrnast; trbušne i zadnja (čmarna) peraja, rjeđe leđna, a često i repna, crvene se na vrhovima kao krv. Ima i jasnijih primjeraka, *u kojih je karakteristično crvenilo peraja poblijedjelo* ili potamnjelo, *u kojih su se sve boje tijela i peraja prometnule u tamno crnkasto-modrikastu".* O. Herman veli, da su u *bodorke* ponajviše leđa plavetna ili zelenkasto-crna, bokovi srebrnasti, trbušne peraje i zadnja (čmarna) svijetlo crvene, *leđna peraja i repna pepeljaste i crvenkasto nahukane;* u *starije* se crvene i prsne peraje, ova boja pre-

[1] „*Летопис* Матице Српске", knjiga 159., str. 128.

vlada i na leđnoj i repnoj peraji, a u to doba i dužica u oku bude srebrnasta te crvenkasto pjegava, katkada je u gornjem dijelu i krvlju infiltrirana. Drugi se opet pisci ne slažu u svemu s ovim opisom boja na bodorci.

Oblik tijela i boje mijenjaju se u obiju vrsta prema rodovima, prema vodi (živa voda i bara) i prema hranivu (a potamne i za vrijeme mriješćenja, bijenja ili prporenja, pa drugačije su i u mladosti), — ele tako se tvore *varijetete,* koje su manje više stalne. A to je i uzrokom, što je O. Herman za zemunsku crvenperku zabilježio 25 narodnih madžarskih imena (na str. 765, premda ih ističe 24 na str. 717); a dodaje, da ih je za nju i u Nijemaca 15. Jedno od ovih madžarskih imena jeste — *bódorkeszeg,* i to pouzdano da se govori u Komoranu. *Bódorkeszeg* i naša *bodorka,* da srodnih li riječi, ta sličnije su od „podorka" i „bodorka", kad još znamo, da se i u nas „bodorka" ubraja u „kesege" ili „kesige". A ima i biljka „bodorhinár" (Utricularia vulgaris). Otkuda su došle ove riječi, to će jezikoispitatelji kazati; napomenut ću samo to, da je prenijeto u Pleteršnikov *Slovar* iz Megiserova *Rječnika* od god. 1595., e je u „ilirskom jeziku" značila riječ „bodor" — „der Stich".

Držeći svagda na umu promjenljivost oblika i boja, sličnost ovih dviju vrsta, a i ona dva glavna njemačka imena: *„Rothauge"* za *„bodorku"*, a *„Rothfeder"* za *„crvenperku"*, pristupit ćemo k podacima iz kvestionara.

Petar Gasser, ribar, napisao je za Sarvaš i Bijelo Brdo (odmah ispod Osijeka), da u Staroj Dravi („jednoj grani njenoj") ima *potorke („Rothaigel")* i crvenperke („Rothfeder"). Tuđa ruka zabilježi za mjesto Retfalu (iznad Osijeka), da Eduard Krempelhofer u drugoj Staroj Dravi lovi crvenperke (Rothfeder) i *bodolike* (ne kaže se njemačko ime). Evo dvaju ribara oko Osijeka, pa jedan izgovara i piše „potorka", a drugi „bodolika". Da nam postane ova nejednakost razumljiva, pustit ćemo starog i školovanog osječkog majstora Martina Žetića, da rekne svoju: „Moj djed i otac — piše mi on — bili su ribari, a i ja sam se od djetinjstva posvetio tome mome lijepom ribarstvu. Imali smo Karašicu, Dravu, Dunav i *Staru Dravu kod Bijelog Brda* dugo i dugo godina u zakupu. Što gosp. Hirc veli o Dalju i o nekom Švabi ribaru, da *podorka* istu zove, *nema pravo;* ista se riba zove *bodorka.* Švaba ne može izgovoriti „b", već je njemu „b" u ovoj riječi „p". Ja još i sada obilazim Švabe, pa mi iskrivljuju riblja imena. Dakle *bodorka,* ili kako po pravom nazivu izgovaramo *bodorika. Bodorika izgleda*

kao crvenperka, samo što ima tamne peraje, više plavkastę, a ne crvenkaste.“

Kada smo kod Drave, evo nam ribara Stjepana Đuranića i Ivana Kreppa, koji zabilježiše za trgovište Valpovo ove vrste *kesega:* deverika, buco, kerekinja, *crvenperka, bodorka*, špicer, jez; a javiše, da bodorke i crvenperke ima i u Karašici i Vučici. U Donjem Miholjcu znadu za kesegu crvenperku, ali i za *klocaru* i deveriku.

Sada ćemo se uputiti niz Dunavo tiho, no žao nam je, što Antun Schweicer (ovako ga pišu), vlastelinski ribar u Dalju, nije tada unio ribu „podorku“ u kvestionar. A žalimo zato, jer je on kazao gosp. Hircu za nju, a i tako da se zove. Četiri vukovarska ribara ističu samo crvenperku; a opatovački ribari Franjo Lovrenčić i Franjo Kovačević love u Dunavu crvenperaka i *bodoraka*. Adam Reder, ribar u Šarengradu, vadi iz bare na općinskom pašnjaku „Ada“ crvenperke i *bodovoljke*, a u dunavske ih ribe ne ubraja. Za Andriju Damjanovića, ribara iz Neština, napisa netko, da hvata u Dunavu crvenperke i *podorke*. Jovan Ranković iz Belegiša poznaje *bodorku;* a moj vrijedni prijatelj Jakov Wolf, građanin zemunski i ribarski majstor, zapisa svojom rukom i imena *bodorka* („Rodäugel“) i *crvenperka* („Rodfeder“).

Otišlo je ovo ime od Zemuna i uza Savu, a i u njene pritoke. Milan Mesarović, ribar u Surčinu, napisa sam za „Surčinske bare“, da se u njima nalaze crvenperke i „bodorke“ (vrsta kesege). Vladislav Đerđ, „vodić kod ustave bosutske“, zabilježi također sam za savski pritok Bosut „bodorku“ i crvenperku; a za Bosut i „Studvu“ kod Morovića uvrstio je među druge ribe Stanko Petrović, ribarski majstor, i *bodoriku* i *crvenperku*, za potonju i njemačko ime „Rothauge“. U Bosutu kod Slakovaca ima „bijelih kesega“ i „kesega crvenperaka“ (opć. načelnik Joso Prakaturović i opć. vijećnik Joso Vojnić), a vinkovački ribari Antun Sorgend i Pavao Seyer love u Bosutu crvenperke i „bjelice“, i to „bjelice *potorke*“. Za Bosut kod Andrijevaca i Rokovaca izvješćuje Josip Vuković, ribar, da hvata „bodorke“ i crvenperke, ali da se crvenperka zove još i *šarankesega*. Onu „bijelu kesegu“ (i Madžari imaju narodno ime „fejérkęszeg“ s različitim značenjem) nađoše još i drugdje, ali gdje uza crvenperku nema toga imena niti riječi „bodorka“, tamo se zna za „bjeloperku“ (Kupinovo na Savi), ili za „bjelomperku“ (Mitrovica na Savi), ili za „običnu kesegu“ (Novi Banovci na Dunavu).

U „Virovima“ kod Bošnjaka našao je Glišo Stojaković, „ribar iz Markušice, sada u Bošnjacima“, kesege špicaljke, kesege *bodorke*

i kesege *crvenkerke* (jamačno se pisar zapisao metnuvši prvo slovo „k“ mjesto „p“). Ali sada nam dođe „vještak ribar Kirchhofer“, koji je zakupnik više voda; pa po njegovu iskazu za Savu kod Broda — ovaj je važan i radi vrste „kralj riba“, t. j. Acipenser stellatus, Pallas, madž. „királyhal“. O. Herman nije zabilježio ništa o postanku ovoga imena, ali ovaj ribar zna, da je „schirgil *kraljem* nazvan radi tečna mesa“ i da je *„jako rijetka riba;* jedanput ovdje ulovljena u 25 godina“. Naprotiv piše gosp. Drag. Hirc, da ova riba „u Savi kod Broda *nije rijetka*“. Kome sad da povjerujemo? — napisa gosp. Božo *Rukavina*, građanski učitelj, da u savskoj vodi ima *crvenperke* („Rothfederl“) i *crvenoke* („Rothauge“), ali i *potorke,* koja je „srodna crvenperki i crvenoki“, te da su sve tri ove ribe „jednako dugačke (6 *cm)* i jednako teške ($^1/_4$ *kg)*“.

U potoku Crncu, kod sela Živika, kazuje gosp. učitelj Franjo Kajfeš (i Marijan Kereković), da ima *„drubice bijelih pera“* i *„drubice crvenih pera“* (imena „crvenperka“ nema tu); a u Savi kod Stare Gradiške nađe se uza crvenperku opet *kladnjače* (Mijo Žužić, ribar iz Donjeg Varoša). U bari „Stara Sava“, a kod sela Puske, piše preč. gosp. Juraj vitez *Duh*, podarhiđakon i župnik u Krapju, da se „crljenperka“ zove još i „crnoperka“, da je u toj „stojećoj vodi“ stalna i s jeseni da je ima najviše. A *crnoperku* napominje i gosp. učitelj Andrija Štajcar iz Save kod Krapja, ter veli: da ima *crljene peraje* i da je nalik na kladnjaču. Za Lonju i Lonjsko polje ubrajaju gosp. Šandor Seljan, opć. bilježnik, i Joso Kasulan, ribar, među „bijelke“ — crvenoperku i *podniku.*

Mato Kuhar iz Križa lovi u „Česmi“ *crljene perke* i *žute perke,* a Josip Lončarić u potoku Črncu, kod mjesta Graca, *crvenke* ili crvenoperke. Julio Štagljar (ribar) i Imbro Čilig (posjednik) ubilježiše za Savu kod Topolovca i Lonju crvenoperku, ali u zagradi i ime „podnika“. Gosp. prof. F. Barušić, sada u Osijeku, spominje za Kupu kod Siska *crvenokicu* ili *crvenperku* (što je i meni „crvenperka“) i *žutoperku* (što je meni „bodorka“); a gosp. Ferdo Hefele metnu god. 1889. u *„Glasnik* hrv. nar. društva“ (str. 76), da je *ista* vrsta „žutoperka ili crvenoperka“, ali u Savi. U općini odranskoj vade iz rijeke Save (kod sela Jakuševec i Mičevec) *„žutoperke crljenog pera“.*

Zbog determiniranja rjeđih ribljih imena zamolio sam neku gospodu, da bi kako priskrbila tijeh riba bilo za „Narodni Muzej“, a bilo za me. Tako mi gosp. Franjo *Wagner,* ravnajući učitelj u *Donjem Miholjcu,* piše 20. svibnja o. g.: „Danas sam saznao od

ribara Pavla Bajera, da u Dravi zaista ima kesege *klocare;* no veoma rijetko dođe on do te ribe, stoga mi nije mogao obećati, da će mi je poslati". Gosp. Matija *Petrović,* učitelj u *Živikama,* javlja mi 18. svibnja o. g.: „Premda ribar nijesam, nastojao sam, da mi ljudi pribave obje vrste *drubica,* koje u Crnac katkada samo zađu, i to kad Sava naraste; ali ih ne mogosmo dobiti, pošto ovog proljeća u ovdašnjim vodama u opće riba malo ima, jer srećom ovoga proljeća nije Sava još nijedanput poplavila. Da li drubice amo nadođu Savom iz gornjih krajeva ili iz bosanskih voda, nije mi poznato". U ovakim slučajevima dobro bi bilo pribilježiti sve, što zna ribar da kaže o obliku, duljini, boji itd. takih riba, možda bi se po tijem podacima ušlo lakše u trag značenju i tijeh narodnijeh imena.

Evo glavnijih podataka o ribi „bodorci" i „crvenperci". Ali mi je, osobito potvrde imena radi, dobro došao i najnoviji izvještaj iz Zemuna od gosp. Fr. *Latkovića,* kr. sudbenog pristava, koji glasi: „Upitao sam gosp. Šandora Streichera, njegove ribare, a i druge Zemunce ribare, te mi *svi* rekoše, da onu ribu zovu ‚bodorka', a ne ‚podorka'. Istu ribu dao sam sebi donijeti, te sam vidio, da su joj prednje peraje pepeljaste kao i *one na hrptu* (a koliko ih je), dokle su zadnje nešto svjetlije, skoro malo crvenkaste. Razlika od bodorke i crvenperke jest ta, što su *kod crvenperke sve peraje jasno crvenkaste*".

Ova posljednja rečenica daje mi povoda, da iz dojakošnjega razlaganja istaknem najprije to, da i u *starije bodorke* (po mom determiniranju Leuciscus rutilus) *sve* peraje mogu da budu crvenkaste. Ali boljega poređenja radi dodat ću onom Brehmovom opisu boja u *crvenperke* (i po mom determ. Scardinius erythrophthalmus), što o njima O. Herman piše, i to za crvenperku iz *tekućice:* trbušne peraje (to su one dvije ozdo na trbuhu, što su na blizu) i zadnja ili čmarna (to je samica odmah iza njih), rjeđe i leđna (ona u ovih *sama* ozgo na leđima ili hrptu), *jesu tamno ili zatvoreno kao krv crvene, repna peraja* (ona na protivnom kraju od glave) je *na rubu kao da je u krv zamočena;* a prsne ili grudne peraje (one dvije ispred trbušnih, ali kao naše ruke sa svake strane po jedna), jesu žućkaste, rjeđe crvenkaste. I opet evo kažem, da se može čovjek namjeriti i na take primjerke od obiju vrsta, u kojih se ne neke, kao što sprijeda čusmo, već *sve* peraje crvene, ali je ipak razlike u crvenilu: u *bodorke* je, veli O. Herman, crvena boja peraja svagda svijetlo ili *otvoreno crvena;* a u *crvenperke* jesu nekolike peraje

uvijek tamno ili zatvoreno crvene *kao krv*. A jamačno zato, što se u nje nekolike peraje baš ovako crvene, dadoše joj u Dubici (na Uni) ime *krvača*.

A sada ću da konstatiram: da u Dravi, Dunavu i Savi, u nekim njihovim pritocima, pa i u okolnim barama, koje su s tekućicama dajbudi za vrijeme poplava svezane, živi riblja vrsta *bodorka* ili *bodorika* (ovo prema imenu „bucika"), a i da je jedno ili drugo ime ovdje ondje izopačeno u *podorka, potorka, bodolika, bodovoljka* i *podnika*.

Što se tiče značenja drugih imena, kao n. pr. *crnoperka, drubica* i *kladnjača*, dalo bi se već govoriti o tom, ali pošto se mjeseca travnja i svibnja po motrenju gotovo sviju ribara bodorke i crvenperke mriješte ili biju, eto tada najbolje zgode, da se i po mliječcima (mužjacima) odrede. Mužjaci vrste bodorka dobiju za vrijeme mriješćenja po tjemenu i po leđnim ljuskama male *čunjaste* kvržice, koje su bijele i *orijetko* stoje, dokle su one na mužjacima crvenperke kao kakva mala zrnca, kojih je mnogo, a na gusto su izbila. Inače je bodorka živahna i okretna, ali se rado miješa među druge ribe, no ne svagda na svoju korist, naleti lako i na udicu, osobito kad progoni vodene bube (kukce); ma crvenperka obilazi mudro udice, pa i društvo, koje nije za nju. Ali na ovo mogu da pripaze samo ribari.

Nema drugoga izlaska za nas, već svakako moramo prekorječicu: konju se gleda u zube, da primijenimo i na bodorku. One dvije „gušne kosti" jesu na donjoj strani ždrijela, odmah iza onih dvaju posljednjih hrskavičavih lukova, na kojima su škržni listići. Kad se kuhana ili pečena glava polako kida, ne će nam te kosti sa zubima umaći, sve da su još i manje ribe.

Ne sumnjam nijednoga časka ni sada, da dr. J. Pančić nije dobro znao, što je radio, kad je odredio *crvenperku* kao Scard. *erythrophthalmus*. Riječ potonja dovodi nas na pomisao, da je u ove vrste oko osobito crveno, ali je „oko lijepe crvene boje" tek u vrste Leuciscus rutilus („rutilus" znači po Leunisu „crvenkastožut"). Ipak je Leunis, kao što znamo od prije, Pančićevu *crvenperku* nazvao *„Rothfeder"*, a *žutoperku* ili *bjeloperku* njegovu (Leuc. *rutilus)* opet *„Rothauge"*. U ove je oko krasno crveno, a u one se ističe osobito crvenilo nekih peraja, pa prema tome i treba da glase njihova imena!

Kako će se porazdijeliti ona narodna imena, kad se tek razgledaju „drobeći zubi", u naprijed se ne da ništa reći, jer svi ljudi i ne

vide jednako: nekima zapne za oči jedan biljeg, a nekima opet drugi. I Madžarima je *Scard. erythrophthalmus* između ostaloga *pirosszárnyú keszeg, veresszémű ponty* (a „ponty“ je nama „šaran“, dakle šaran s crvenim okom; a pošto ova riba ide u kesege, govori se i u nas „šarankesega“), *véreskeszeg, veresszem* i — kao što već znamo — *bódorkeszeg*. Ali je njima i Leuc. rutilus nalik na šarana *(pirosszárnyú ponty*, str. 820).

Eno sam ja n. pr. u petak, 29. travnja 1898., na zagrebačkom Kaptolskom trgu kupio u ribara iz Rugvice *„žutoperku“*, a u drugoga iz Podsusjeda *„crljenoperku“*. Po onom oštrom bridu na trbuhu, po zlatastoj dužici, na kojoj je na izvanjem rubu njenom, ali *ispod* zjenice, bila duguljasta *crvenkasta* pjega, znao sam i bez obzira na druga obilježja, da su obje *ista* vrsta, i to *Scardinius erythrophthalmus*. Kad sam im na podne povadio one zube, bješe ih u „žutoperke“ (ženke, pune još ikre) na objema kostima u donjem retku po 5 a u gornjem po 3, — naprotiv u „crljenoperke“ (mužjaka) na *lijevoj kosti ozdo 6*, ozgo 3, a na desnoj ozdo 5, a ozgo 3. Sva je prilika, *da će izuzetak za broj zuba na lijevoj gušnoj kosti u vrste Leuciscus rutilus vrijediti i za vrstu Scard. erythrophthalmus*, premda to u ovom članku napomenuti ihtiolozi ne navode, a ni *Heckel* i *Kner*. Pa o ovom izuzetnom broju zuba na lijevoj gušnoj kosti u „crvenperke“, koju *Marsilius* u svome djelu *„Danubius Pannonico-Mysicus“* (Hagae et Amstelodami, 1726.) naziva *crvenom kesegom* (svezak IV., str. 41.), ne napominju ništa ni francuski pisci H. *Gervais* i R. *Boulart*, jer u *prvom* svesku djela „Les *Poissons*“ čitamo: „Les dents pharyngiennes, petites, grêles et munies de dentelures sur leur bord interne, sont disposées sur *deux rangées*. L'interne est composée de trois dents, *l'externe de cinq*“ (Pariz 1876., str. 110). Te je zube vidio i gosp. prof. S. *Brusina*. A u „žutoperke“ su i bile prsne peraje baš jasno žute, dokle su se u „crljenoperke“ i one na kraju crvenjele. Eto na istom trgu ima *jedna* vrsta *dva* imena!

No već drugoga petka (dne 6. svibnja) nađoh na jednoj gomili na klupi pred ribarom iz Jakuševca (ovo je selo već naprijed napomenuto) među mladim i starim „crljenperkama“ i takih primjeraka, u kojih je tijelo nalik na čunak, a očne dužice, izuzevši nešto malko ispod zjenice, skroz crvene. U starih „crljenperaka“ zaista su bile sve peraje crvene, ali u ovih manjih i duguljastih primjeraka bjehu one više *plavkaste* ili *pepeljaste*. Malo me je u ovih potonjih iznenadila ma i slaba oštrina onog dijela trbuha, što

je između trbušnih peraja i zadnje, jer i njihove su ljuske s toga mjesta uzduž po srijedi savite i s prednjeg kraja donekle bridaste, a to zato, što sam po početku leđne peraje prema trbušnima, po obliku tijela i očnom crvenilu tvrdo držao, da su to moje „bodorke". Kasnije sam se uvjerio, e su doista one, i to po „drobećim zubima", kojih je, kao što znamo, i u nje bilo s lijeve strane 6, a s desne 5; u jednom retku ovi, a i oni. Evo nam opet drugoga dokaza, da na istom trgu *dvije* vrste, Scardinius erythrophthalmus i Leuciscus rutilus, nose – *jedno* narodno ime! A 13. svibnja bješe opet „bodorka" nekom drugom ribaru „bjelica" i „crljenokica".

No u krajevima, gdje se uza crvenperku spominje kao srodna riba „bodorka", ona je pouzdano jedna osobita vrsta. Ako bismo se držali i O. Hermana, koji je za vrstu Leuciscus rutilus odabrao ime „*véresszárnyú* konczér" (premda se njene peraje ne crvene kao krv), a za Scard. erythrophthalmus „*pirosszemű* kele" (premda i gosp. Drag. Hirc zna, da narod Leuciscus rutilus zove „*crvenokicom*"), onda bismo i protiv Pančića i Leunisa morali zamijeniti značenja riječi „crvenperka" i „bodorka", — pa bi tako „bodorka" bila i nama, što je i Madžarima. Možda će se naći i naših ribara, kojima će to i biti, ali sjećajući se dobro, da sam po zubima odredio ime „bodorka", ostajem i sada pri ovome, t. j. *da je bodorka u Zemunu* i njegovoj okolini *Leuciscus rutilus*, Linné. A tko zna bolje, rodilo mu polje!